Полиномиальные диаграммы.

Селиванов Даниил.

ГБОУ СОШ №1002

Руководитель: Аленников. М.А.

Рассмотрим квадратный трехчлен вида $P(x) = x^2 + qx + q^2$ (*), где $q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$.

Определение 1. Полиномиальной диаграммой для $P(x)$ называется плоский многоугольник с вершинами в точках $(1;0);(1;2);(q;1);(q^2;0)$.

Определение 2. Площадью полиномиальной диаграммы $P(x)$ называется площадь плоского многоугольника задающего диаграмму. Будем обозначать площадь полиномиальной диаграммы через, $f(q)$.

Теорема 1.

Площадь полиномиальной диаграммы для квадратного трехчлена (*) выражается формулой

$$f(q) = \frac{(q+3)(q-1)}{2}, \text{ для } q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}. \qquad (**)$$

Доказательство.

Построим полиномиальную диаграмму для $P(x)$. Это многоугольник, проходящий через точки $\mathrm{A}(1;0); \mathrm{B}(1;2); \mathrm{C}(q;1); \mathrm{D}(q^2;0)$. Из точки С, опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Получим точку $\mathrm{F}(q;0)$. Тогда $f(q) = \mathrm{S}(\mathrm{ABCF}) + \mathrm{S}(\Delta\,\mathrm{FCD})$. Так как ABCF-прямоугольная трапеция, имеем, что $\mathrm{S}(\mathrm{ABCF}) = \frac{3}{2}(q-1)$. $\Delta\,\mathrm{FCD}$-прямоугольный треугольник, поэтому $\mathrm{S}(\Delta\,\mathrm{FCD}) = \frac{q^2 - q}{2}$. В итоге получим, что

$$f(q) = \frac{3}{2}(q-1) + \frac{q^2 - q}{2} = \frac{q^2 + 2q - 3}{2} = \frac{(q+3)(q-1)}{2}.$$

Замечание

При дальнейших рассуждениях мы будем понимать $f(q)$ просто как квадратный трехчлен вида (**)

Интересно рассмотреть последовательность значений $f(q)$ и их попарные частные. Запишем их в виде таблицы 1.

q	$f(q)$	$f(q+1)/f(q)$
2	2,5	2,4
3	*6*	*1,75*
4	*10,5*	*1,52*
5	*16*	*1,4*
6	*22,5*	*1,3*
7	*30*	*1,28*
8	*38,5*	*1,24*
9	*48*	*1,21*
10	*58,5*	*1,19*
11	*70*	*1,17*
12	*82,5*	*1,16*
13	*96*	*1,15*
14	*110,5*	*1,14*
15	*126*	*1,13*
16	*142,5*	*1,12*

При рассмотрении полученных данных возникает предположение о том, что последовательность попарных частных вида $f(\mathrm{q}+1)/f(\mathrm{q})$ стремиться к единице при неограниченном увеличении q. Сформулируем данное предположение в виде теоремы.

Теорема 2.

$$\lim_{q\to\infty}\frac{f(q+1)}{f(q)}=1, \text{ для } f(q)=\frac{(q+3)(q-1)}{2}, q\in\mathbb{Z}^{+}\setminus\{1\}$$

Доказательство.

$$\lim_{q\to\infty}\frac{f(q+1)}{f(q)}=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{q(q+4)}{2}\cdot\frac{2}{(\mathrm{q}+3)(\mathrm{q}-1)}\right)=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{q^2+4q}{q^2+2q-3}\right)=1.$$

Если еще более тщательно проанализировать таблицу 1, то можно заметить, что разность между соответствующими попарными разностями будет единица. Речь идет о разностях вида: $\Delta^2 f(q)= f(q+2)-2f(q+1)+f(q)$

Отразим эти наблюдения в таблице 2.

q	$f(q)$	$f(q+1)$	$f(q+2)$	$\Delta^2 f(q)$
2	2,5	6	10,5	1
3	6	10,5	16	1
4	10,5	16	22,5	1
5	16	22,5	30	1
6	22,5	30	38,5	1
7	30	38,5	48	1
8	38,5	48	58,5	1
9	48	58,5	70	1

(табл.2)

Поэтому докажем, следующую теорему:

Теорема 3.

$\Delta^2 f(q) = 1$ для $f(q) = \dfrac{(q+3)(q-1)}{2}$, $\forall q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0;1\}$

Доказательство.

$$f(q+2) = \frac{(q+5)(q+1)}{2} = \frac{q^2+6q+5}{2}$$
$$f(q+1) = \frac{q(q+4)}{2} = \frac{q^2+4q}{2}$$
$$f(q) = \frac{(q+3)(q-1)}{2} = \frac{q^2+2q-3}{2}$$

$$\Delta^2 f(q) = f(q+2) - 2f(q+1) + f(q) = \frac{q^2+6q+5}{2} - \frac{2(q^2+4q)}{2} + \frac{q^2+2q-3}{2} =$$
$$= \frac{q^2+6q+5-2q^2-8q+q^2+2q-3}{2} = 1$$