О площадях некоторых плоских многоугольников

Селиванов Даниил.

ГБОУ СОШ №1002

Руководитель: Аленников. М.А.

Пусть $q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$. Обозначим через $f(q)$ площадь плоского многоугольника с вершинами в точках $(1;0);(1;2);(q;1);(q^2;0)$.

Теорема 1.

Площадь плоского многоугольника с вершинами в точках $(1;0);(1;2);(q;1);(q^2;0)$ выражается формулой:

$$f(q) = \frac{(q+3)(q-1)}{2}, \text{ для } q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}.$$

Доказательство.

Многоугольник имеет своими вершинами точки $\mathrm{A}(1;0);\mathrm{B}(1;2);\mathrm{C}(q;1);\mathrm{D}(q^2;0)$. Из точки C, опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Получим точку $\mathrm{F(q;0)}$. Тогда $f(q) = \mathrm{S(ABCF)} + \mathrm{S}(\Delta\,\mathrm{FCD})$. Так как ABCF-прямоугольная трапеция, имеем, что $\mathrm{S(ABCF)} = \frac{3}{2}(q-1)$. $\Delta\,\mathrm{FCD}$-прямоугольный треугольник, поэтому $\mathrm{S}(\Delta\,\mathrm{FCD}) = \frac{q^2-q}{2}$. В итоге получим, что

$$f(q) = \frac{3}{2}(q-1) + \frac{q^2-q}{2} = \frac{q^2+2q-3}{2} = \frac{(q+3)(q-1)}{2}.$$

Интересно рассмотреть последовательность значений $f(q)$ и их попарные частные. Запишем их в виде таблицы 1.

q	$f(q)$	$f(q+1)/f(q)$
2	2,5	2,4
3	*6*	*1,75*
4	*10,5*	*1,52*
5	*16*	*1,4*
6	*22,5*	*1,3*
7	*30*	*1,28*
8	*38,5*	*1,24*
9	*48*	*1,21*
10	*58,5*	*1,19*
11	*70*	*1,17*
12	*82,5*	*1,16*
13	*96*	*1,15*
14	*110,5*	*1,14*
15	*126*	*1,13*
16	*142,5*	*1,12*

При рассмотрении полученных данных возникает предположение о том, что последовательность попарных частных вида $f(q+1)/f(q)$ стремиться к единице при неограниченном увеличении q. Сформулируем данное предположение в виде теоремы.

Теорема 2.

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{f(q+1)}{f(q)}\right)=1 \text{ ,для } f(q)=\frac{(q+3)(q-1)}{2} \qquad q\in\mathbb{Z}^{+}\setminus\{1\}.$$

Доказательство.

$$\lim_{q\to\infty}\frac{f(q+1)}{f(q)}=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{q(q+4)}{2}\cdot\frac{2}{(\mathrm{q}+3)(\mathrm{q}-1)}\right)=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{q^2+4q}{q^2+2q-3}\right)=1$$

Если еще более тщательно проанализировать таблицу 1, то можно заметить, что разность между соответствующими попарными разностями будет единица. Речь идет о разностях вида:

$$\Delta^2 f(q)=f(q+2)-2f(q+1)+f(q)$$

Отразим эти наблюдения в таблице 2.

q	$f(q)$	$f(q+1)$	$f(q+2)$	$\Delta^2 f(q)$
2	2,5	6	10,5	1
3	6	10,5	16	1
4	10,5	16	22,5	1
5	16	22,5	30	1
6	22,5	30	38,5	1
7	30	38,5	48	1
8	38,5	48	58,5	1
9	48	58,5	70	1

(табл.2)

Поэтому докажем, следующую теорему:

Теорема 3.

$\Delta^2 f(q) = 1$, для $f(q) = \dfrac{(q+3)(q-1)}{2}$, $q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$.

Доказательство.

$$f(\mathrm{q}+2) = \frac{(\mathrm{q}+5)(\mathrm{q}+1)}{2} = \frac{q^2+6q+5}{2}$$

$$f(\mathrm{q}+1) = \frac{q(q+4)}{2} = \frac{q^2+4q}{2}$$

$$f(\mathrm{q}) = \frac{(q+3)(q-1)}{2} = \frac{q^2+2q-3}{2}$$

$$\Delta^2 f(q) = f(q+2) - 2f(q+1) + f(q) = \frac{q^2+6q+5}{2} - \frac{2(q^2+4q)}{2} + \frac{q^2+2q-3}{2} =$$

$$= \frac{q^2+6q+5-2q^2-8q+q^2+2q-3}{2} = 1$$

Теорема (основная)

Площадь плоского многоугольника с вершинами в точках $A(q^n;0) \in \mathbb{R}^2$, $A_i(q^{n+i};\mathrm{k}-\mathrm{i}) \in \mathbb{R}^2$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 \le i \le k$, $n \in \mathbb{N}$ выражается формулой

$$f(\mathrm{q}) = \left(\sum_{m=0}^{k-2} \frac{\mathrm{q}^{n+m}(\mathrm{q}-1)(2\mathrm{k}-2\mathrm{m}+1)}{2} \right) + \frac{q^{n+k} - q^{n+k-1}}{2}$$

Доказательство.

Воспользуемся методом трапеций для нахождения площади данного многоугольника.

Опустим перпендикуляры $A_i\tilde{A}_i$ на ось абсцисс. Тогда очевидно, что $\tilde{A}_i(q^{n+i};0)\in\mathbb{R}^2$. Ясно, что тогда многоугольник $(A....\tilde{A}_i)_{i=0}^{k}$ разрежется на прямоугольные трапеции и прямоугольный треугольник. Посчитаем площади одной из такой трапеции, а именно $\tilde{A}_m A_m A_{m+1}\tilde{A}_{m+1}$. Заметим, что $0\le m\le k-2$. Тогда площадь данной трапеции считается по формуле $S(\tilde{A}_m A_m A_{m+1}\tilde{A}_{m+1})=\dfrac{(2\mathrm{k}-2\mathrm{m}+1)\mathrm{q}^{n+m}(\mathrm{q}-1)}{2}$. Теперь нам необходимо их просуммировать, учитывая, что $0\le m\le k-2$ имеем $\sum_{m=0}^{k-2}S(\tilde{A}_m A_m A_{m+1}\tilde{A}_{m+1})=\sum_{m=0}^{k-2}\dfrac{(2\mathrm{k}-2\mathrm{m}+1)\mathrm{q}^{n+m}(\mathrm{q}-1)}{2}$ и к полученной сумме трапеций прибавить площадь прямоугольного треугольника $\Delta\tilde{A}_{k-1}A_{k-1}A_k$ равной $S(\Delta\tilde{A}_{k-1}A_{k-1}A_k)=\dfrac{q^{n+k}-q^{n+k-1}}{2}$.

В итоге имеем $f(\mathrm{q})=\left(\sum_{m=0}^{k-2}\dfrac{\mathrm{q}^{n+m}(\mathrm{q}-1)(2\mathrm{k}-2\mathrm{m}+1)}{2}\right)+\dfrac{q^{n+k}-q^{n+k-1}}{2}$.