Треугольник Лейбница

Вавилов А.А.
ГБОУ СОШ №9 119421, Москва ул. Новаторов, 34 корпус 1

Представленная работа посвящена изучению простейших свойств треугольника Лейбница. Прежде всего, доказывается его связь с треугольником Паскаля (теорема 1), показывается наличие у треугольника Лейбница оси симметрии (теорема 2), затем находятся различные суммы чисел обратных к числам, стоящих в одной строке треугольника Лейбница (теоремы 3-6). После этого показывается, что числа, стоящие в одной строке треугольника Лейбница, сначала убывают, а затем возрастают. Таким образом, существует минимальное значение среди чисел, стоящих в одной строке треугольника Лейбница. Доказывается, что если номер строки – четное число, то минимум один, если же номер строки – нечетное число, то минимума два. Устанавливается, чему равны эти минимумы (теорема 7). И наконец, в заключении показывается, что любое число, стоящее в произвольной строке, представимо в виде бесконечной суммы некоторых чисел, стоящих под ним (теоремы 8-9).

Треугольник Лейбница – это бесконечная таблица чисел, имеющая треугольную форму. Фрагмент треугольника Лейбница изображен на рис. 1. По бокам этого треугольника стоят числа обратные натуральным числам, а каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, расположенных под ним.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Рис. 1. Фрагмент треугольника Лейбница.

Если сравнить треугольник Лейбница с треугольником Паскаля, сразу бросается в глаза некоторая связь между этими треугольниками [1].

[1] В дальнейшем мы будем использовать простейшие свойства треугольника Паскаля без доказательства (см., например, [1])

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Рис. 2. Фрагмент треугольника Паскаля.

Будем нумеровать строки как треугольника Паскаля, так и треугольника Лейбница, сверху вниз, причем самая верхняя строка будет иметь номер равный 0, а числа, стоящие в одной строке, будем нумеровать слева направо, причем самое левое число также будет иметь номер равный 0. Таким образом, в каждом из рассмотренных выше треугольников мы ввели систему координат. Элементы треугольника Паскаля обычно обозначают символом C_n^k, где n – номер строки, а k – номер числа, стоящего в строке с номером n. Так число C_3^2 – это число 3. Числа треугольника Лейбница будем обозначать символом L_n^k. Тогда L_3^2 – это число $\frac{1}{12}$.

С учетом этих обозначений правила, задающие треугольник Паскаля и треугольник Лейбница, можно записать соответственно в виде

$$
\begin{aligned}
&C_n^0 = C_n^n = 1, \\
&C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad \text{при } 0 < k < n
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1}, \\
&L_{n-1}^k = L_n^k + L_n^{k-1}, \quad \text{при } 0 < k < n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Однако правила, задающие треугольник Лейбница, удобнее записывать в виде

$$
\begin{aligned}
&L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1}, \\
&L_n^k = L_{n-1}^k - L_n^{k-1}, \quad \text{при } 0 < k < n.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Теорема 1.

$$
L_n^k = \frac{1}{(n+1)C_n^k}. \tag{4}
$$

Доказательство. Для доказательства этого равенства воспользуемся индукцией. Сначала проверим его для крайних значений $k = 0$ и $k = n$.

В силу (3)

$$
L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1},
$$

С другой стороны, поскольку

$$
C_n^0 = C_n^n = 1,
$$

$$\frac{1}{(n+1)C_n^0} = \frac{1}{(n+1)C_n^n} = \frac{1}{n+1}.$$

Покажем, что (4) верно для k, такого что $0 < k < n$.

Предположим, что

$$L_{n-1}^{k-1} = \frac{1}{nC_{n-1}^{k-1}} \quad \text{и} \quad L_n^{k-1} = \frac{1}{(n+1)C_n^{k-1}}. \tag{5}$$

С учетом (3) и (5) имеем

$$L_n^k = \frac{1}{nC_{n-1}^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)C_n^{k-1}}.$$

Однако

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

поэтому

$$\begin{aligned} L_n^k &= \frac{(k-1)!(n-k)!}{n(n-1)!} - \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!(n+1)} = \\ &= \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left(1 - \frac{n-k+1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(k-1)!(n-k)!k}{n!(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{n!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)C_n^k}. \end{aligned}$$

□

В силу равенства (4) многие свойства треугольника Лейбница легко следуют из соответствующих свойств треугольника Паскаля. Например, легко доказать симметричность треугольника Лейбница относительно вертикальной оси.

Теорема 2. $L_n^k = L_n^{n-k}$ *для любого натурального* n *и* $0 \le k \le n$.

Доказательство. Поскольку

$$L_n^k = \frac{1}{(n+1)C_n^k} \text{ и } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

то

$$\begin{aligned} L_n^k &= \frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!} = \frac{(n-k)!(n-(n-k))!}{(n+1)n!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)C_n^{n-k}} = L_n^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.

$$\frac{1}{L_n^0} + \frac{1}{L_n^1} + \ldots + \frac{1}{L_n^n} = (n+1)2^n. \tag{6}$$

Доказательство. Как известно,

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L_n^0} + \frac{1}{L_n^1} + \ldots + \frac{1}{L_n^n} = \\ &= (n+1)C_n^0 + (n+1)C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+1)2^n. \end{aligned}$$

□

Аналогично, из известного равенства

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Следует

Теорема 4.

$$\frac{1}{L_n^0} - \frac{1}{L_n^1} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{L_n^n} = 0. \tag{7}$$

Теорема 5.

$$\frac{1}{L_n^0} - \frac{1}{L_n^1} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{L_n^n} = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Складывая равенства (6) и (7) и разделив полученную сумму на 2, получим равенство (8). □

Теорема 6.

$$\frac{1}{L_n^1} + \frac{1}{L_n^3} + \frac{1}{L_n^5} + \ldots = (n+1)2^{n-1}. \tag{9}$$

Доказательство. Вычитая равенство (7) из равенства (6) и разделив полученную разность на 2, получим равенство (9). □

Как в теореме 5 , так и в теореме 6, сумма продолжается до тех пор, пока верхний индекс не станет больше нижнего.

Из Рис. 1 хорошо видно, что числа, находящиеся в одной строке треугольника Лейбница, сначала убывают, а затем возрастают, достигая своего наименьшего значения где-то посередине. Покажем, что это выполняется для любой строки треугольника Лейбница и покажем при каких именно значениях k достигается минимум.

Теорема 7. *Последовательность $\{L_n^k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, строго убывает на отрезке $[0, \lfloor n/2 \rfloor]$ и строго возрастает на отрезке $[\lfloor n/2 \rfloor + 1, n]$*[2] *При четном n минимум достигается в точке $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$, а при нечетном n – в двух точках $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ и $\lfloor n/2 \rfloor + 1 = (n+1)/2$.*

Доказательство. Воспользуясь найденной выше формулой (4), оценим отношение:

$$L_n^k \big/ L_n^{k-1} = \frac{1}{(n+1)C_n^k} \Bigg/ \frac{1}{(n+1)C_n^{k-1}} = C_n^{k-1} \big/ C_n^k = \frac{k}{n-k+1}.$$

Если $k < \frac{n+1}{2}$, то $\frac{k}{n-k+1} < 1$. В самом деле, если $k < \frac{n+1}{2}$, то $2k < n+1$. Вычитая из обоих частей этого неравенства k, получим $k < n-k+1$. Откуда следует $\frac{k}{n-k+1} < 1$. Поэтому $L_n^k < L_n^{k-1}$, т. е. функция L_n^k убывает. Наоборот, если $k > \frac{n+1}{2}$, то $\frac{k}{n-k+1} > 1$, т. е. функция L_n^k возрастает.

Пусть $n = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2}$, т. е. при $k < m + \frac{1}{2}$ функция L_{2m}^k убывает, а при $k < m + \frac{1}{2}$ функция L_{2m}^k возрастает (см. Рис. 3).

[2]Здесь $\lfloor x \rfloor$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное x

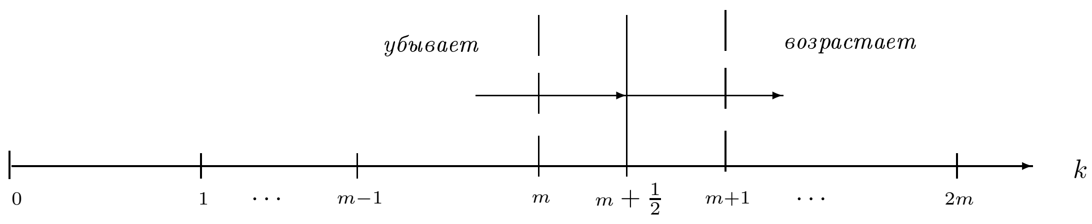

Рис. 3

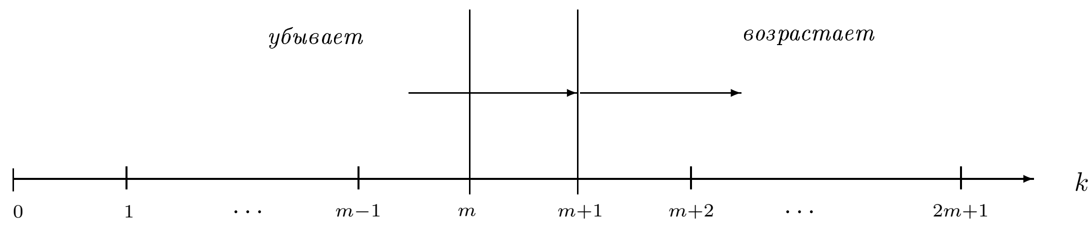

Рис. 4

Однако

$$L_{2m}^{m}/L_{2m}^{m+1} = \frac{(2m)!}{(m+1)!(m-1)!} \times \frac{m!m!}{(2m)!} = \frac{m}{m+1} < 1,$$

т. е. $L_{2m}^{m} < L_{2m}^{m+1}$. Следовательно, функция L_{2m}^{k} достигает своего наименьшего значения при $k = m$.

Если $n = 2m+1$, $m = 1, 2, \ldots$, то $\frac{n+1}{2} = m+1$. Поэтому при $k < m+1$ функция L_{2m+1}^{k} убывает, а при $k > m+1$ функция L_{2m+1}^{k} возрастает (см. Рис. 4).

Но $L_{2m+1}^{m+1} = L_{2m+1}^{m}$, поэтому L_{n}^{k} достигает своего наименьшего значения в двух точках m и $m+1$. □

Теорема 8. $L_n^k = L_{n+1}^{k+1} + L_{n+2}^{k+1} + L_{n+3}^{k+1} + \ldots$ *Для любых натуральных* n *и* $0 \le k \le n$.

Доказательство. Воспользуясь соотношением (3), можно записать

$$\begin{aligned} L_n^k - L_{n+1}^k &= L_{n+1}^{k+1} \\ L_{n+1}^k - L_{n+2}^k &= L_{n+2}^{k+1} \\ L_{n+2}^k - L_{n+3}^k &= L_{n+3}^{k+1} \\ \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

Почленно складывая эти неравенства, получим

$$L_n^k = L_{n+1}^{k+1} + L_{n+2}^{k+1} + L_{n+3}^{k+1} + \ldots.$$

□

Таким образом, число L_n^k можно представить в виде бесконечной суммы чисел, стоящих справа и под ним. Например,

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \boxed{\frac{1}{6}} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \boxed{\frac{1}{12}} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \boxed{\frac{1}{30}} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \boxed{\frac{1}{60}} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \boxed{\frac{1}{105}} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Рис. 5

С другой стороны, поскольку треугольник Лейбница обладает свойством симметрии, число L_n^k можно представить в виде бесконечной суммы чисел, стоящих слева и под ним.

Теорема 9. $L_n^k = L_{n+1}^k + L_{n+2}^{k+1} + L_{n+3}^{k+2} + \ldots$ *Для любых натуральных* n *и* $0 \leq k \leq n$.

Доказательство. В самом деле, если

$$L_n^k = L_{n+1}^{k+1} + L_{n+2}^{k+1} + L_{n+3}^{k+1} + \ldots\ ,$$

То, в силу теоремы 2,

$$L_n^{n-k} = L_{n+1}^{n+1-k-1} + L_{n+2}^{n+2-k-1} + L_{n+3}^{n+3-k-1} + \ldots \tag{10}$$

Полагая в (10) $k = n - k$, получим требуемое равенство. $\square$

Например,

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \boxed{\frac{1}{6}} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \boxed{\frac{1}{12}} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \boxed{\frac{1}{30}} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \boxed{\frac{1}{60}} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \boxed{\frac{1}{105}} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Рис. 6

Литература:

[1] В.А. Успенский Треугольник Паскаля М.: Наука, 1979.

[2] Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ М.: МЦНМО, 2002.

[3] Д. Пойа Метематическое открытие М.: Наука, 1970.