Глазков Данила, 9 класс.

<u>Задача о квадратах, построенных внешним образом на боковых сторонах произвольного треугольника на плоскости.</u>

Имеется произвольный треугольник ABC на плоскости. На его боковых сторонах AC и BC во внешнюю сторону построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2 соответственно. Докажем следующий факт: прямые A_1B, A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство:

Опишем окружности вокруг квадратов ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Рассмотрим расположение описанных окружностей по отношению друг к другу. Возможно два различных случая.

1) *Окружности касаются в вершине C треугольника ABC* (это наиболее простой случай). Тогда $\angle ACB=90^\circ$. Действительно, проведем внешнюю касательную к окружностям в точке C и, воспользовавшись теоремой об угле между касательной и хордой, придём к выводу, что $\angle A_2CA=\angle B_2CB=\frac{1}{2}\angle ACB=45^\circ$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\angle ABC=90^\circ$.

В данном случае прямые A_1B и AB_1 пересекаются в точке C, поскольку углы A_1CB и ACB_1 развёрнутые, а отрезки A_1C и CB_1 являются продолжениями боковых сторон BC и AC треугольника ABC соответственно. В той же точке их будет пересекать и прямая A_2B_2, так как $\angle A_2CA+\angle B_2CB+\angle ACB=180^\circ$ и угол A_2CB_2 является развёрнутым.

2) *Пусть $\angle C\neq 90^\circ$. Помимо точки C окружности пересекутся ещё в одной точке.* Назовём её E. Заметим, что $\angle AEA_1=\angle B_1EB=90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр; $\angle CEB_1=\angle CEA_1=45^\circ$ как вписанные углы (стороны квадрата делят окружность на 4 равных дуги по 90°). Отсюда следует, что $\angle A_1EB_1=\angle CEB_1+\angle CEA_1=90^\circ$. Поэтому углы AEB_1 и BEA_1 развёрнутые, и прямые A_1B и AB_1 пересекаются и проходят через точку E. Угол A_2EB_2 также развёрнутый, потому что $\angle A_1EA_2=\angle B_1EB_2=45^\circ$, $\angle A_1EB_1=90^\circ$ и $\angle A_1EA_2+\angle B_1EB_2+\angle A_1EB_1=180^\circ$, поэтому прямая A_2B_2 проходит через точку E.

Таким образом, прямые A_1B, A_2B_2, AB_1 пересекаются в одной точке. Требуемое доказано.