Математика.

О некоторых экстремальных прямых

Ипатова Виктория

ГБОУ «Химический лицей № 1303», город Москва

Научный руководитель: Привалов Александр Андреевич, МПГУ, доцент, к.ф.-м.н.

Аннотация.

Пусть имеется n точек $\{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ (n>2) на плоскости. Требуется

1. Найти на плоскости прямую l, с наименьшей суммой расстояний до этих точек, т.е. такую, что неравенство
$$\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l) \le \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l_1)$$
выполняется для любой прямой l_1 на плоскости.

2. Найти прямую l, наименее уклоняющуюся от этих точек, т.е. такую, что
$$\max_{1\le i\le n} \rho(A_i, l) \le \max_{1\le i\le n} \rho(A_i, l_1)$$
где $\rho(A, l)$ – расстояние от точки A до прямой, l_1 – произвольная прямая на плоскости.

3. Найти прямую l, с наименьшей суммой квадратов расстояний до этих точек, т.е. такую, что неравенство
$$\sum_{i=1}^{n} \rho^2(A_i, l) \le \sum_{i=1}^{n} \rho^2(A_i, l_1)$$
выполняется для любой прямой l_1.

Запишем уравнение произвольной прямой l :

$$ax + by + c = 0,$$

Тогда расстояние от точки $A(x_0,y_0)$ до l равно:

$$\rho(A, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Для удобства, будем искать уравнение прямой в виде:

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha + c = 0 \qquad (1)$$

где α – угол образованной прямой с осью абсцисс (Оx), c – некоторое число и наши задачи сводятся к минимизации функций

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(\alpha, c) = \sum_{i=1}^{n} | y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha + c |, \\ S_\infty &= S_\infty(\alpha, c) = \max_{1\le i\le n} | y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha + c |, \qquad (*) \\ S_2 &= S_2(\alpha, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha + c)^2, \end{aligned}$$

где (x_i,y_i) – координаты точек $A_i(x_i,y_i)$, i=1,…n.

def. ***Норма*** — функционал, заданный на векторном пространстве и обобщающий понятие длины вектора или абсолютного значения числа.

Очевидно, что функции (*) непрерывны по переменным α и c, поэтому задачи 1 – 3 имеют решения. Прямая l – решение первой задачи, является *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ прямой в $\boldsymbol{l}_1$-метрике (по норме пространства $\boldsymbol{l}_1$). Решением задачи 3 является прямая *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ в $\boldsymbol{l}_2$-метрике (по норме пространства $\boldsymbol{l}_2$ или евклидовой метрике). И, наконец, решение второй задачи – *наименее уклоняющейся* от точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ прямой в равномерной метрике ($\boldsymbol{l}_\infty$-метрике или по норме пространства $\boldsymbol{l}_\infty$ или пространства $\boldsymbol{m}$).

Напомним, $\boldsymbol{l}_p$ ($p\geq 1$) – множество всех линейное пространство последовательностей

$z = (z_1, z_2,\dots)$ с нормой $\| z \|_p = \left(\sum_j | z_j |^p \right)^{\frac{1}{p}}$, если $p=\infty$, то $\boldsymbol{l}_\infty$ – множество всех ограниченных последовательностей – линейное пространство с нормой
$\| z \| = \| z \|_\infty = \max_j | z_j |$ (*равномерная* норма) .

Рассмотрим ***1 задачу***

Гипотеза 1.

Среди любых различных точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ на плоскости существуют такие две точки, что для прямой l, проходящей через них, и любой другой прямой l_1 на плоскости, сумма расстояний от l до точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ не больше суммы расстояний от l_1 до точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, l_1)$$

Набросок доказательства:

Введем координаты точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$: $A_i(x_i,y_i)$, $i=1,\dots n$. Тогда задача сводится к нахождению прямой l, при которой функция

$$S_1(\alpha, c, l) = \sum_{i=1}^{n} \rho(l, A_i) = \sum_{i=1}^{n} |y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha + c| \qquad (2)$$

принимает минимальное значение. Эта функция двух переменных является непрерывной и ограниченной, значит, по теореме Вейерштрасса достигает своего минимального значения. То есть задача разрешима.

Пусть l – искомая прямая, т.е. $S_1(\alpha,c,l_1) \geq S_1(\alpha,c,l)$ (2) для любой прямой l_1. Обозначим $S_1(\alpha,c,l) = S_0$

Докажем, что тогда прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$.

Введем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой l, ось ординат вдоль нормали к прямой l и центр совпадал с точкой (x_1,y_1). Очевидно, что некоторые из точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ лежат над прямой l, а некоторые под l (в противном случае l не наилучшая прямая).

$$S_0 = \sum_{+} y_i - \sum_{-} y_j \qquad (3)$$

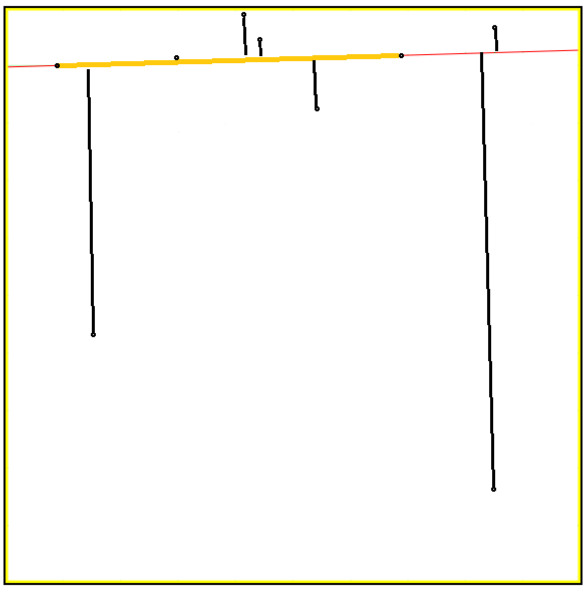
где $\sum_{+} y_i$ сумма точек, лежащих выше координатной прямой, а $\sum_{-} y_j$ ниже

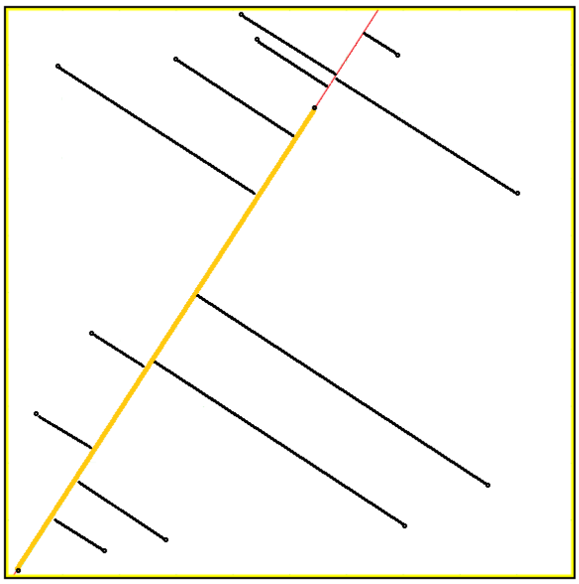
Предположим, что ни одна из точек $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ не лежит на l, т.е. на оси абсцисс. Докажем, что тогда наилучшее приближение S_0 можно уменьшить вращением прямой l вокруг начала координат (0,0):

$$\sum_{i=2}^{n} \rho(l, A_i) = \sum_{i=2}^{n} \left| y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha \right| = \cos\alpha\left(\sum_{+} y_i - \sum_{-} y_j\right) - \sin\alpha\left(\sum_{+} x_i - \sum_{-} x_j\right) = S_0 \cos\alpha - S_1 \sin\alpha$$

Где $S_1 = \sum_{+} x_i - \sum_{-} x_j$. Теперь, если S_1 меньше нуля, то повернем l по часовой стрелки (α<0); если это выражение неотрицательно, то – против часовой стрелки (α>0); если же S_1=0, то крутим в любую сторону. Как не сложно видеть во всех случаях $S_1(\alpha,0)$ будет меньше S_0. Неравенство (2) нарушится и следовательно прямая будет содержать по крайней мере одну точку из $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$. Пусть это точка A_1. Предположим, что l не содержит ни одной точки множества $\{A_2, \dots, A_n\}$.

Введем систему координат с осью абсцисс, совпадающей с прямой l и началом в точке A_1. Тогда в этой системе координат все точки $\{A_2, \dots, A_n\}$ будут иметь не нулевые ординаты. Повторяя предыдущие рассуждения, докажем существования точки множества $\{A_2, \dots, A_n\}$ и прямой l.




.