# ТЕОРЕМЫ О ГАЛСТУКЕ.

**Крутовский Роман** [1]

**Abstract.**
**Theorem.** There are general position points $A, B, C, P$ on the projective plane. Let $A_P$ be the intersection point of lines $AP$ and $BC$. Analogously define $B_P$ and $C_P$. Take any points $A_1$, $B_1$, $C_1$ on $AP$, $BP$, $CP$, respectively. Let $W_C$ be the intersection point of $A_1B_P$ and $B_1A_P$. Analogously define points $W_A$ and $W_B$. Then lines $CW_C$, $AW_A$ and $BW_B$ pass through one point.
We also generalize this theorem and find interesting related properties.

Следующая серия задач возникла в обсуждениях с Иваном Фроловым. Так же автор статьи очень благодарен Андрею Сергунину, сформулировавшему теорему 1.6.
Отдельно хотелось бы поблагодарить Ф. А. Ивлева и А. Б. Скопенкова за поддержку и полезные замечания.

В статье используются базовые понятия и факты проективной геометрии. Подробную информацию о них можно найти в книгах [1] и [2].
*Соглашения.*
*1)* Все теоремы рассматриваются в проективной плоскости.
*2)* n-угольник — n точек общего положения в плоскости (n — натуральное число).
*3)* Сторона n-угольника — прямая, содержащая сторону n-угольника в обычном ее понимании.
*Примечание.* В тексте работы каждая из теорем, рисунок к ней и ее доказательство расположены друг за другом для удобства понимания самих теорем.

**Определения.** Дан треугольник $ABC$. $P$ — произвольная точка плоскости, не лежащая на сторонах треугольника $ABC$. $A_P$, $B_P$, $C_P$ — точки пересечения прямых $AP$, $BP$ и $CP$ со сторонами $BC$, $AC$, $AB$ соответственно. На $AP$, $BP$, $CP$ произвольным образом выбраны соответственно точки $A_1$, $B_1$, $C_1$. Через $W_C$ определим точку пересечения $A_1B_P$ и $B_1A_P$. Аналогично определяются точки $W_A$ и $W_B$. $W$ – точка пересечения $AW_A$ и $BW_B$.

**Теорема 1.1 (Теорема о галстуке).** Прямая $CW_C$ проходит через $W$.

*Доказательство теоремы 1.1.* Для троек точек $A$, $A_1$, $A_P$ и $B$, $B_1$, $B_P$ применим теорему Паппа (см. рис. 1). Тогда получим, что $C$, $W_C$ и $J_C$, точка пересечения $AB_1$ и $BA_1$, лежат на одной прямой. Аналогично определим точки $J_A$ и $J_B$ (и применим теорему Паппа для соответствующих им пар троек точек). По обратной теореме Брианшона конику можно вписать в $AC_1BA_1CB_1$ . Теперь заметим, что стороны шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ являются сторонами шестиугольника $AJ_CBJ_ACJ_B$, а значит, коника, вписанная в $AC_1BA_1CB_1$, вписана и в $AJ_CBJ_ACJ_B$. Тогда по теореме Брианшона $AJ_A, BJ_B, CJ_C$ пересекаются в некоторой точке $W$. QED

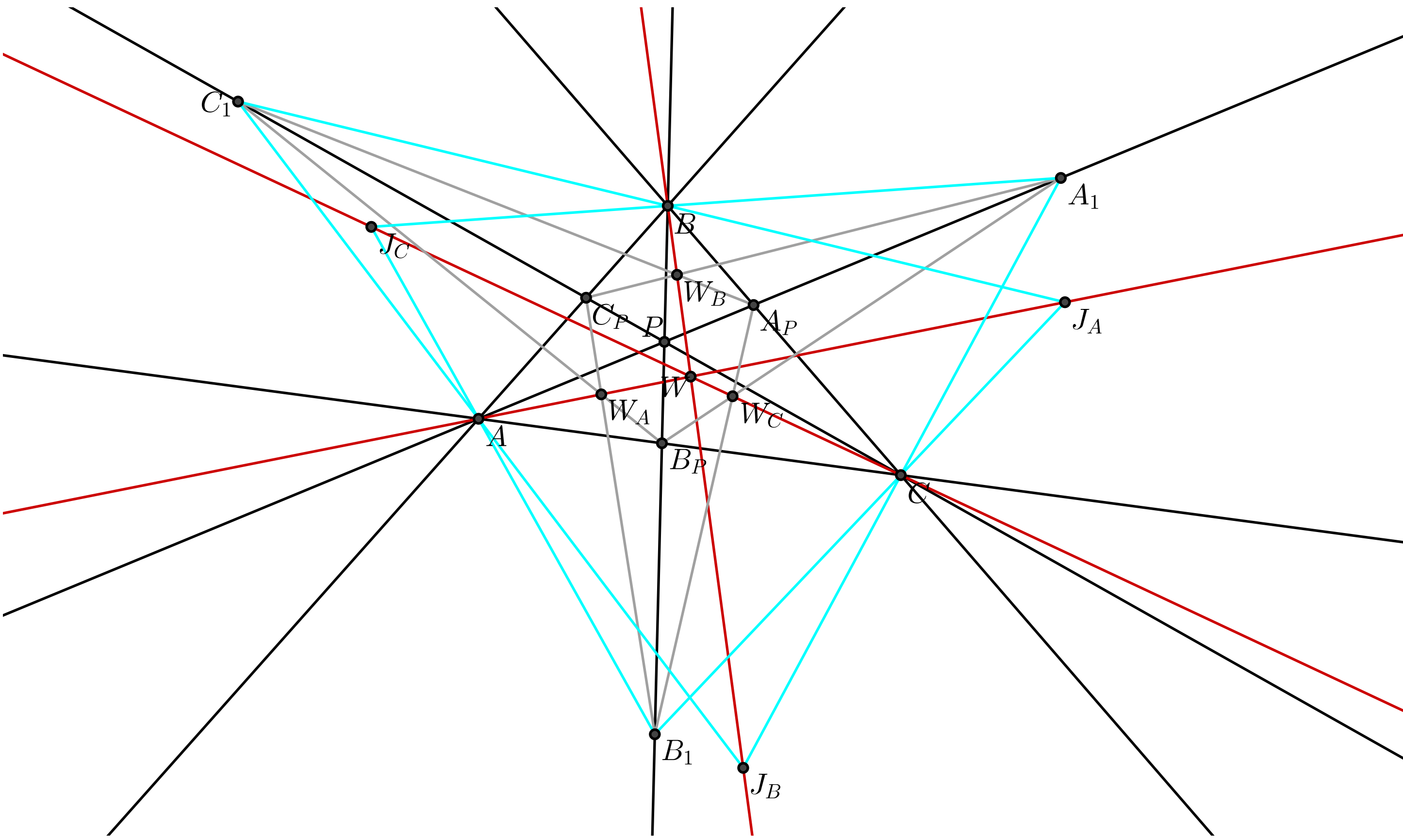


Рис. 1: Галстук

**Теорема 1.2.** Пусть теперь $A'_P$ — произвольная точка прямой $AP$. Через $W'_B$ определим точку пересечения $A_1B_P$ и $B_1A'_P$. Аналогично определим $W'_C$. Обозначим через $N$ точку пересечения $BW'_B$ и $CW'_C$. Тогда точки $A$, $B$, $C$, $W$, $A_1$ и $N$ лежат на одной конике.

Доказательство теоремы 1.2 вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.** На плоскости даны пять точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, и через $E$ проведены 3 прямые $l_1$, $l_2$, $l_3$, не содержащие оставшиеся 4 точки (см. рис. 2). На прямой $l_3$ отметили произвольно точку $P$. Определим точки $A', B'$ и $X$ так: $A' = CP \bigcap l_1$, $B' = DP \bigcap l_2$, $X = AA' \bigcap BB'$. Тогда точка $X$ всегда лежит на конкретной конике, проходящей через $A$, $B$ и $E$.

*Доказательство леммы 1.* Определим проективное преобразование $f$ следующим образом. Сначала спроецируем с центром в точке $C$ прямую $l_1$ в прямую $l_2$ и $A$ переведем в себя, а затем спроецируем $l_2$ с центром в $D$ в прямую $l_3$ и оставим опять $A$ на месте, а затем оставим прямую $l_3$ на месте и $A$ переведем в $B$. Очевидно, что так можно сделать, т. к. сохраняются двойные отношения и по 4 точкам задается проективное преобразование. Тогда для любой точки $P$ $f(AA') = BB'$ и $f(A) = f(B)$, а значит, в силу леммы Соллертинского (см. [1]), точка $X$ принадлежит всегда некоторой конике, которая проходит через $A$ и $B$. Точка $E$ принадлежит этой конике, т. к. если $P = E$, то соответствующий $X = E$. QED

*Доказательство теоремы 1.2.* Тогда, очевидно, теорема 1.2 следует из леммы 1. Точкам $B, C, A_1$ из теоремы 1.2 соответствуют точки $A$, $B$, $E$ из леммы 1. То, что для точек $B$ и $W$ найдутся такие положения $A'_P$, что $N$ совпадет с ними следует из теоремы 1.1. QED

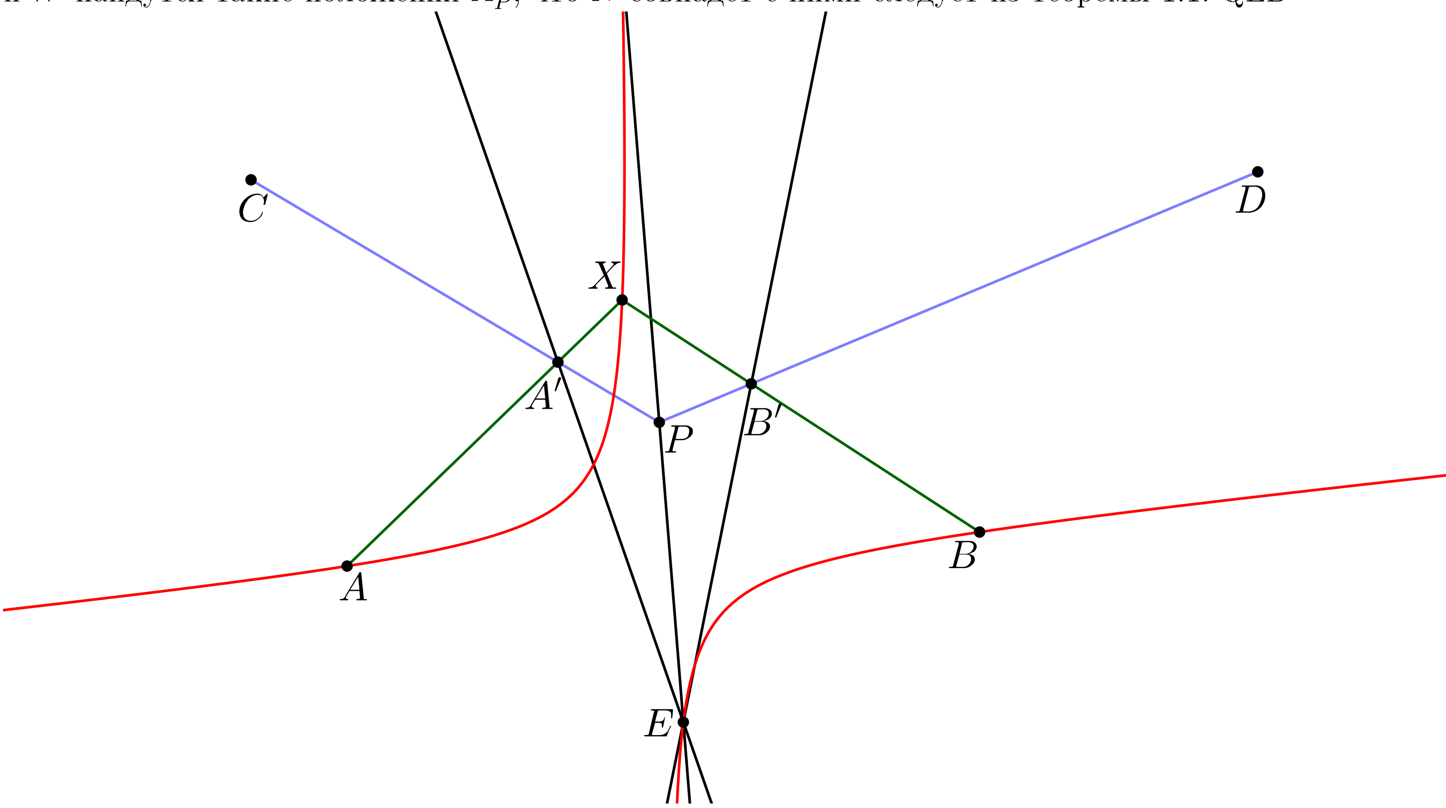


Рис. 2: Лемма 1

**Теорема 1.3.** Определим через $T_A$ точку пересечения $WA_1$ и $BC$. Аналогично определяются точки $T_B$, $T_C$. Тогда прямые $AT_A$, $BT_B$, $CT_C$ пересекаются в некоторой точке $T$ (см. рис. 3).

*Доказательство теоремы* 1.3. Как мы уже знаем, $C$, $W_C$ и $J_C$ лежат на одной прямой по теореме Паппа. Значит, точки $C$, $W$ и $J_C$ лежат на одной прямой. Тогда по теореме Дезарга треугольники $AT_BB_1$ и $BT_AA_1$ перспективны, так как соответствующие стороны перескаются в точках, лежащих на одной прямой. Это значит, что треугольники $BT_BB_1$ и $AT_AA_1$ перспективны. Значит, $W$, $P$ и точка пересечения $AT_A$ и $BT_B$ лежат на одной прямой. Поскольку аналогичные рассуждения верны для точек пересечения $BT_B$ и $CT_C$, $AT_A$ и $CT_C$, то $AT_A$, $BT_B$, $CT_C$ пересекаются в одной точке. QED

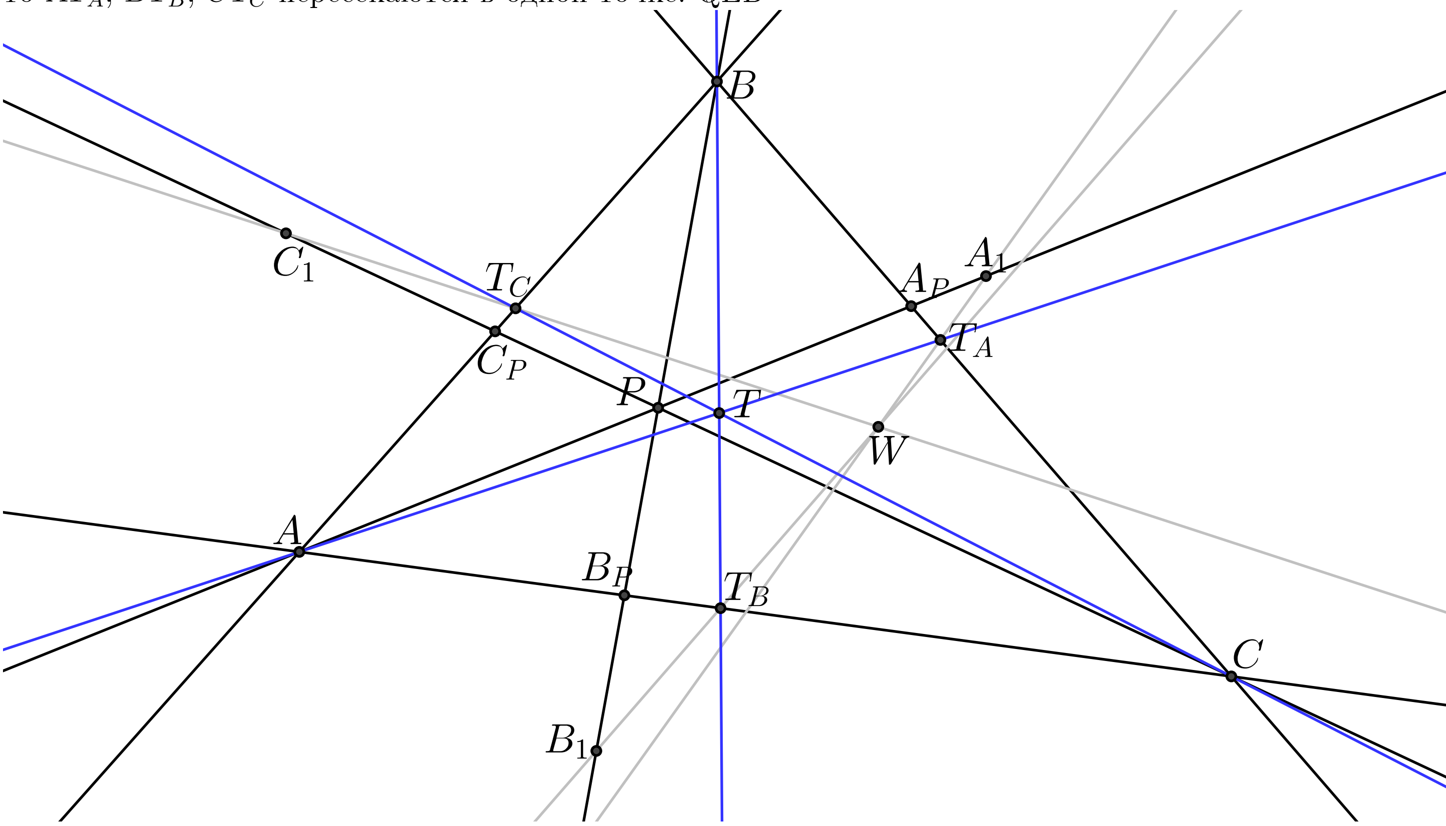


Рис. 3: Теорема 1.3

**Теорема 1.4.** За $G_A$ примем точку персечения $W_AP$ и $BC$. Аналогично определяются точки $G_B$ и $G_C$. Тогда $AG_A$, $BG_B$ и $CG_C$ пересекаются в некоторой точке $G$.

*Доказательство теоремы* 1.4. Покажем, что прямые $W_AA_P$, $W_BB_P$ и $W_CC_P$ пересекаются в некоторой точке. В шестиугольник $A_PB_1C_PA_1B_PC_1$ можно вписать конику по обратной теореме Брианшона. Это значит, что эта коника вписана в $A_PW_BC_PW_AB_PW_C$. Значит, по теореме Брианшона указанные выше прямые пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку через $R$.

Теперь покажем, что точки пересечения пар прямых $A_PG_B$ и $G_AB_P$, $C_PG_B$ и $G_CB_P$, $A_PG_C$ и $G_AC_P$ лежат на прямой $RP$. Если мы это докажем, то по обратной теореме Паскаля шестиугольник $A_PG_AB_PG_BC_PG_C$ будет вписан в некоторую конику, а значит, $AG_A$, $BG_B$ и $CG_C$ конкурентны. Докажем, что точка пересечения $A_PG_B$ и $G_AB_P$ лежит на $RP$, а для остальных точек доказательство будет аналогичным. Используя теорему Паскаля, получим, что данное утверждение равносильно тому, что $A_PW_AG_AB_PW_BG_B$ вписан в некоторую конику. А это по обратной теореме Паскаля действительно так, потому что $C_1, P, C$ лежат на одной прямой.

*Следствие.* Точка $G$ лежит на прямой $RP$.

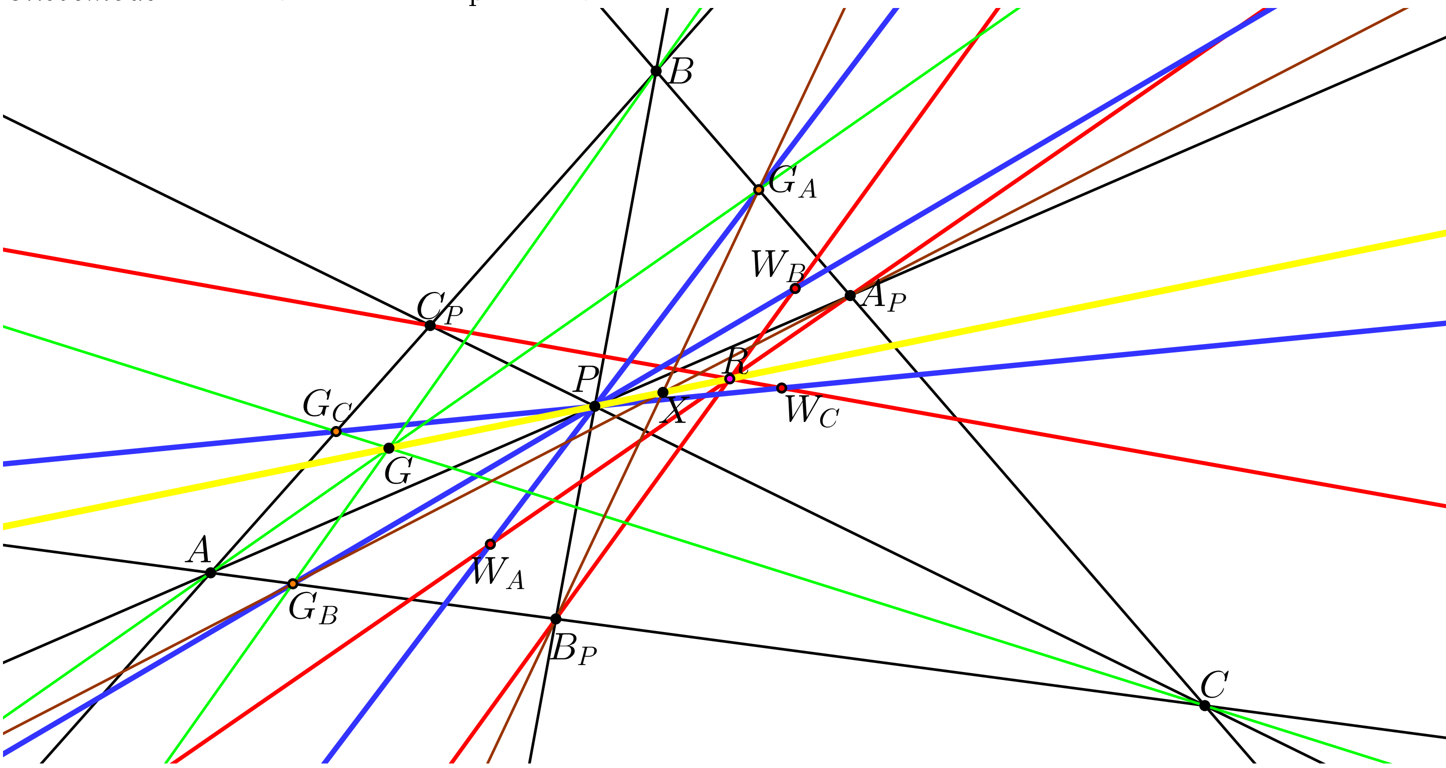


Рис. 4: Теорема 1.4

**Определения.**
1) $(A, B, C, D)$ — двойное отношение точек $A, B, C, D$.
2) $(l_1, l_2, l_3, l_4)$ — двойное отношение прямых $l_1, l_2, l_3, l_4$.

**Теорема 1.5.** Точки $A$, $B$, $C$, $P$, $G$(из теоремы 1.4) и $T$(из теоремы 1.3) лежат на одной конике.

*Доказательство теоремы* 1.5. Очевидно, что условие теоремы равносильно равенству двойных отношений следующих четверок прямых: $(AB, AG, AP, AT)$ и $(CB, CG, CP, CT)$. Данное равенство, очевидно, эквивалентно тому, что $(B,\ G_A,\ A_P,\ T_A)$=$(B,\ G_C,\ C_P,\ T_C)$ (так будем обозначать двойное отношение четверки точек). Докажем это равенство.
Прежде заметим, что $PJ_A \bigcap BC = T_A$ (верны и симметричные утверждения для других вершин треугольника). Для этого достатоно заметить, что теорема Дезарга верна для треугольников $PBA_1$ и $J_ACW$ ввиду коллинеарности $A, B_1, J_C$.
Определим $B_1C \bigcap BA = C_U, B_1A \bigcap BC = A_U, BP \bigcap CW = C_B, BP \bigcap AW = A_B$. Тогда, сделав проекции с центром в точке $P$ с прямых $BC, BA$ на $AW, CW$ соответственно, получим, что $(B,\ G_A,\ A_P,\ T_A)$=$(A_B, W_A, A, J_A)$ и $(B,\ G_C,\ C_P,\ T_C)$=$(C_B, W_C, A, J_C)$. Теперь с центром в точке $B_1$ сделаем проекции с прямых $AW$ и $CW$ на $BA$ и $BC$ соответственно. Тогда получим, что $(A_B, W_A, A, J_A)$=$(B, C_P, A, C_U)$ и $(C_B, W_C, A, J_C)$=$(B, A_P, C, A_U)$. Теперь заметим, что для треугольников $AA_PA_U$ и $CC_PC_U$ верна теорема Дезарга ввиду коллинеарности $B, P, B_1$. Тогда очевидно, что $(B, C_P, A, C_U)$=$(B, A_P, C, A_U)$. Значит, $(B,\ G_A,\ A_P,\ T_A)$=$(B,\ G_C,\ C_P,\ T_C)$. QED

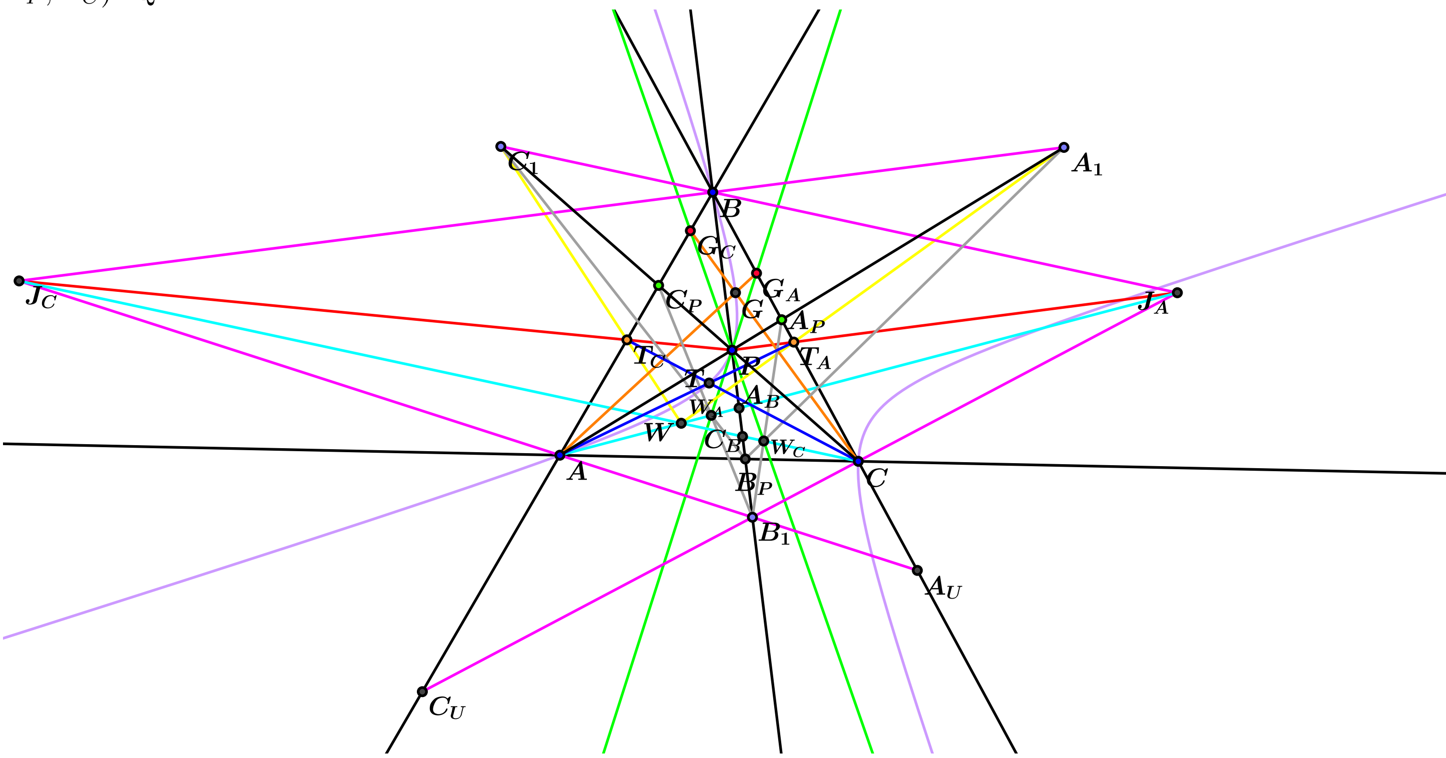


Рис. 5: Теорема 1.5

**Обобщенная теорема о галстуке (Теорема 1.6).** $Q$ — произвольная точка, не лежащая на сторонах треугольника $ABC$. $A_Q, B_Q, C_Q$ — точки пересечения прямых $QA_1$, $QB_1$ и $QC_1$ с $BC, AC, AB$ соответственно. $V_C$ — точка пересечения прямых $A_QB_1$ и $B_QA_1$. Аналогично определяются точки $V_A, V_B$. Тогда $AV_A, BV_B, CV_C$ пересекаются в одной точке.

*Доказательство теоремы 1.6.* $A_1B_QC_1A_QB_1C_Q$ — описанный шестиугольник по обратной теореме Брианшона. Тогда коника, вписанная в него, вписана и в $A_1V_BC_1V_AB_1V_C$. Следовательно по теореме Брианшона $A_1V_A, B_1V_B, C_1V_C$ пересекаются в некоторой точке. Обозначим ее через $T$.

Заметим, что треугольники $AA_1V_A$ и $BV_BB_1$ перспективны с центром в $C_Q$. Тогда по теореме Дезарга точка $T$ лежит на прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых $AV_A$ и $BB_1$, $AA_1$ и $BV_B$, которые определим как $B_A$ и $A_B$ соответственно. Применяя аналогичные рассуждения для пар треугольников $AA_1V_A$ и $CV_CC_1$, $CC_1V_C$ и $BV_BB_1$ и определяя для них точки $A_C, C_A, B_C, C_B$ аналогичным образом, получаем, что $A_BB_A$, $A_CC_A$ и $B_CC_B$ конкурентны.

Теперь вместе с последним результатом из леммы 2 последует сама теорема.

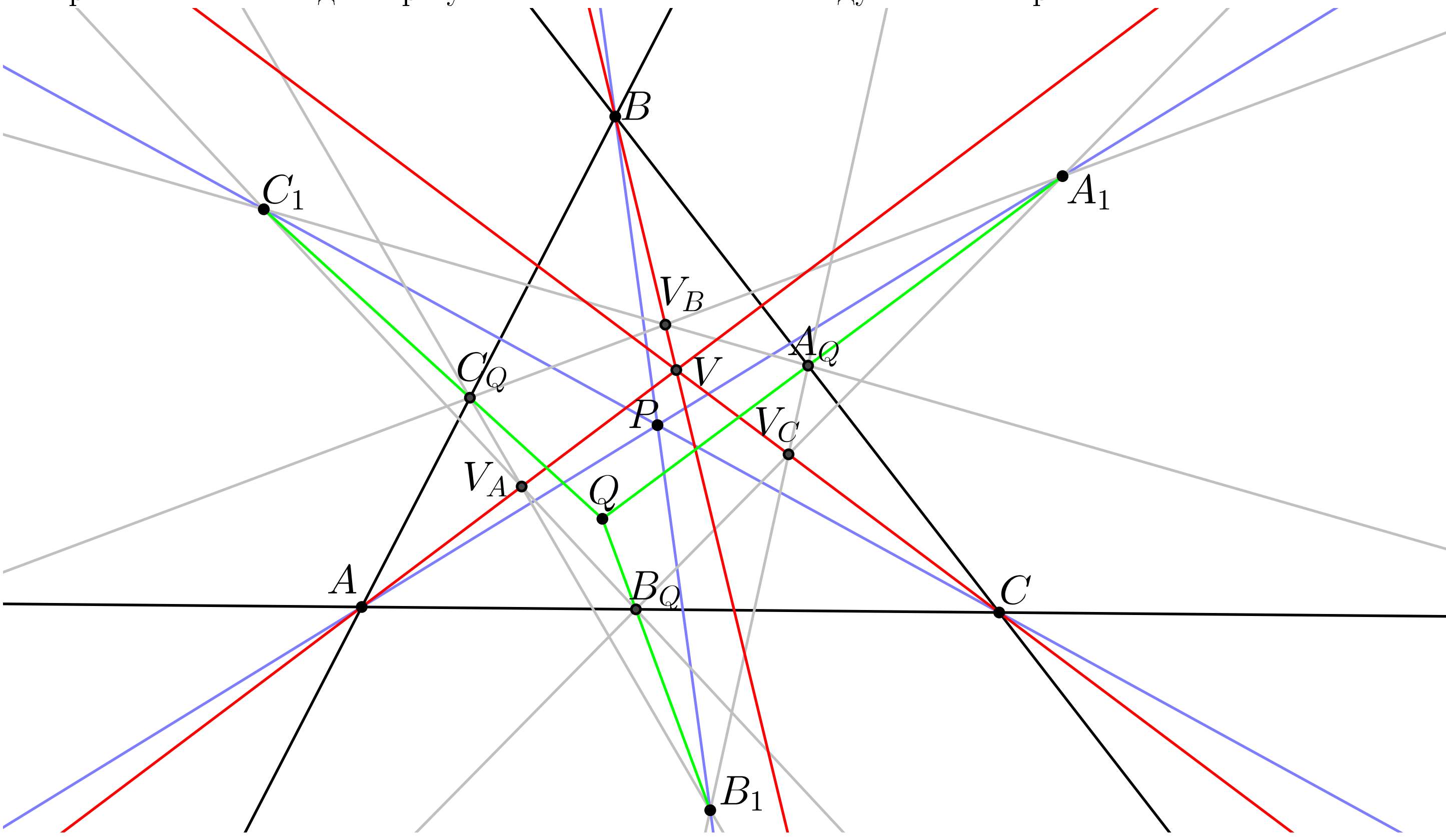


Рис. 6: Обобщение теоремы о галстуке

**Лемма 2.** На плоскости есть 5 различных точек $A, B, C, P, Q$ общего положения. Пусть $AP$ и $BQ$ пересекаются в точке $A_B$, а прямые $AQ$ и $BP$ в точке $B_A$. Аналогично определим точки $B_C, C_B, A_C, C_A$. Тогда прямые $A_BB_A$, $A_CC_A$ и $B_CC_B$ пересекаются в одной точке.

*Доказательство леммы 2.* Переведем прямую $PQ$ в бесконечно удаленную и афинным преобразованием сделаем направления на $P$ и $Q$ перпендикулярными. Тогда мы получим следующий факт. Имеется прямоугольник $ABCD$. Прямая $l_1$, параллельная $AB$, пересекает $BC$ в точке $K$. Прямая $l_2$, параллельная $AD$, пересекает $AB$ в точке $N$. Прямые $l_1$ и $l_2$ пересекаются в точке $R$. Тогда прямые $NC$, $AK$ и $DR$ конкурентны. Этот факт является общеизвестным и доказывается несложно. QED

Пусть теперь прямые $AV_A$ и $BV_B$ пересекаются в точке $V$. Мы знаем, что для пары треугольников $B_AC_AC_B$ и $A_BA_CB_C$ верна теорема Дезарга. Тогда точка пересечения $B_AC_B$ и $A_BB_C$ лежит на прямой $AC$. Но $B_C$ как точка, лежащая на прямой $BP$ и удволетворяющая последнему, по точкам $B_A, C_B, A_B$ восстанавливается однозначно. Значит, для пятерки прямых $AP, BP, CP, AV_ABV_B$ существует единственная прямая через точку $C$ , для которой может выполняться конкурентность $A_BB_A$, $A_CC_A$ и $B_CC_B$. По лемме 2 это прямая $CV$. Тогда, очевидно, $CV$ и $CV_C$ совпадают. QED

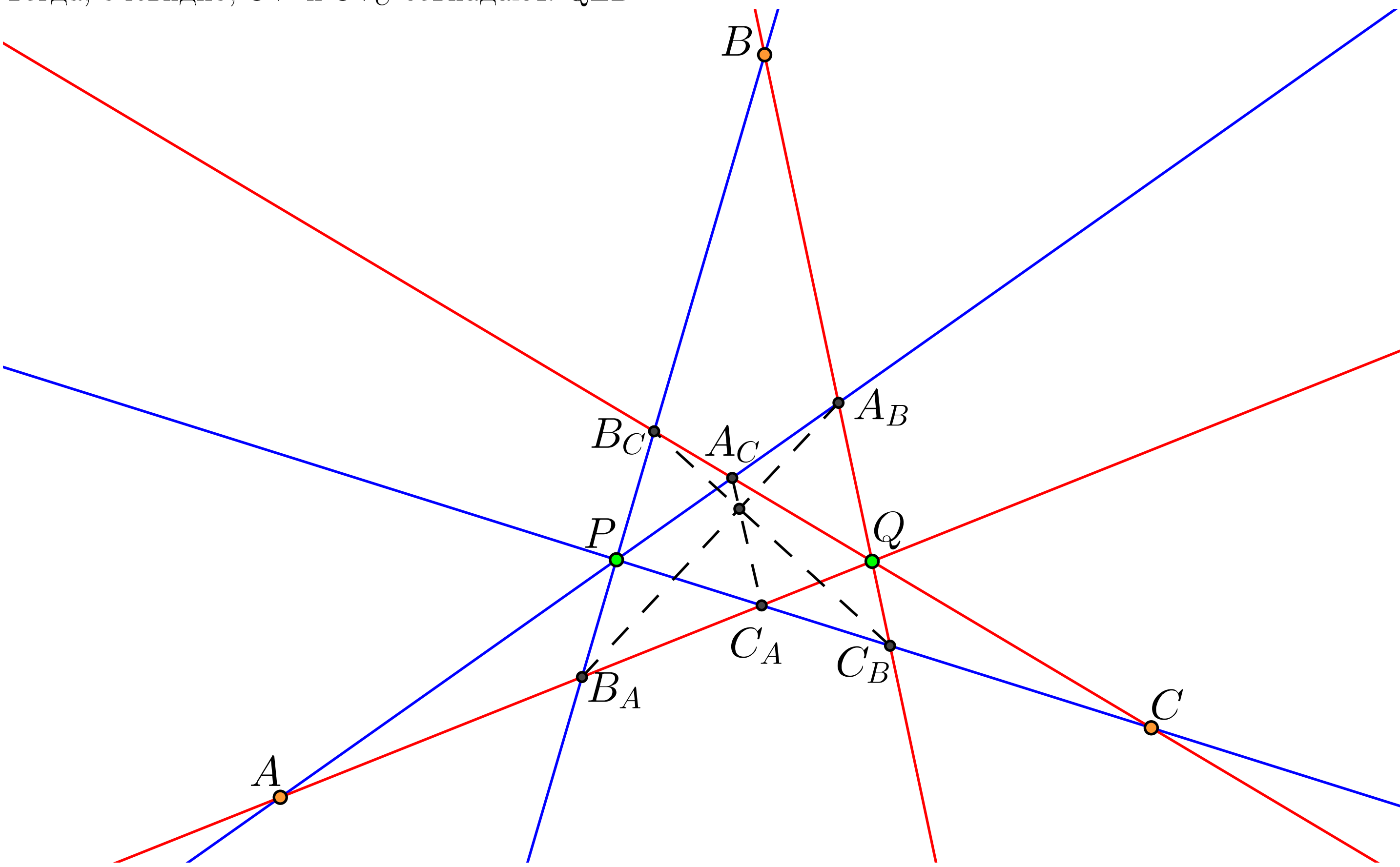


Рис. 7: Лемма 2

**Список литературы.**


1. *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. 2-е изд., дополн. М.: МЦНМО, 2011

2. *А. В. Акопян.* Геометрия в картинках. (с2) М., 2011