Об одной конике, связанной с к-трисами треугольника

Валерия Немычникова, Лицей №1303.
Научный руководитель: к. ф.-м. н. А. А. Привалов.

Теорема 1 (О конике на основаниях изогональных чевиан)**.** *Пусть* $A_1, A_2 \in BC; B_1, B_2 \in AC; C_1, C_2 \in AB$, $\angle ABB_2 = \angle CBB_1, \angle BCC_1 = \angle ACC_2, \angle BAA_1 = \angle CAA_2$. *Тогда* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *лежат на одной конике.*

Доказательство. Пусть $\angle A = \alpha; \angle B = \beta; \angle C = \gamma;$
$\angle BCC_1 = \angle ACC_2 = \gamma_1;$
$\angle BAA_1 = \angle CAA_2 = \alpha_1;$
$\angle ABB_2 = \angle CBB_1 = \beta_1;$
$\angle BAA_2 = \angle CAA_1 = \alpha_2;$
$\angle BCC_2 = \angle ACC_1 = \gamma_2;$
$\angle CBB_2 = \angle ABB_2 = \beta_2;$
По теореме синусов:
$\frac{A_2C}{AA_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma}; \frac{A_2B}{AA_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}; \frac{A_2B}{CA_2} = \frac{\sin\alpha_2\sin\gamma}{\sin\alpha_1\sin\beta};$
Аналогично:
$\frac{A_1B}{CA_1} = \frac{\sin\alpha_1\sin\gamma}{\sin\alpha_2\sin\beta};$
$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\sin\beta_1\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta_2};$
$\frac{CB_2}{AB_2} = \frac{\sin\beta_2\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta_1};$
$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{\sin\gamma_1\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma_2};$
$\frac{BC_2}{AC_2} = \frac{\sin\gamma_2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma_1}.$
По теореме Карно, если A_1, $A_2 \in BC$, B_1, $B_2 \in AC$, C_1, $C_2 \in AB$, то эти 6 точек лежат на одной конике если и только если выполнено условие Карно:
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{CA_2}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AB_2}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{BC_2}} = 1. \text{ [Yiu]}$$

Подставим получившиеся выражения в теорему Карно:
$$\frac{\sin\alpha_1\sin\gamma\sin\alpha_2\sin\gamma\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta_2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_2\sin\beta\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\sin\beta\sin\alpha_1\sin\beta\sin\gamma\sin\beta_2\sin\gamma\sin\beta_1\sin\gamma_1\sin\alpha\sin\gamma_2\sin\alpha} = 1$$

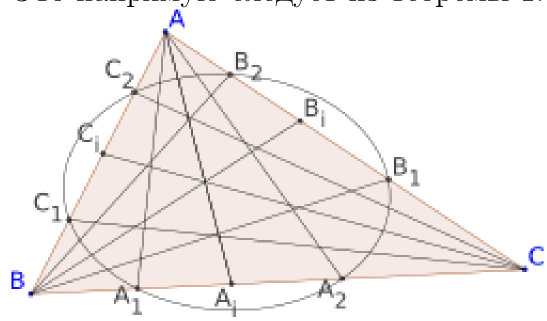
Таким образом, если провести из каждой вершины треугольника две изогональные чевианы, то основания этих шести чевиан лежат на одной конике.

□

Далее в работе будем рассматривать треугольник ABC, в котором $A_1, A_2 \in BC; B_1, B_2 \in AC; C_1, C_2 \in AB$.
$\angle ABB_2 = \angle CBB_1, \angle ABC = k * \angle ABB_2; \angle BCC_1 = \angle ACC_2, \angle ACB = k * \angle BCC_1; \angle BAA_1 = \angle CAA_2, \angle CAB = k * \angle CAA_2,$
$k \in N$, $m = 1/k$
$\angle A = \alpha; \angle B = \beta; \angle C = \gamma;$
$\angle BCC_1 = \angle ACC_2 = \gamma_1;$
$\angle BAA_1 = \angle CAA_2 = \alpha_1;$
$\angle ABB_2 = \angle CBB_1 = \beta_1;$
$\angle BAA_2 = \angle CAA_1 = \alpha_2;$
$\angle BCC_2 = \angle ACC_1 = \gamma_2;$
$\angle CBB_2 = \angle ABB_2 = \beta_2;$

Следствие 1. *$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной конике.*

Это напрямую следует из теоремы 1.



Утверждение 1. *$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ имеют следующие барицентрические координаты:*

$A_1(0 : \sin(1-m)\alpha \sin\beta : \sin m\alpha \sin\gamma)$;
$A_2(0 : \sin m\alpha \sin\beta : \sin(1-m)\alpha \sin\gamma)$;
$B_1(\sin m\beta \sin\alpha : 0 : \sin(1-m)\beta \sin\gamma)$;
$B_2(\sin(1-m)\beta \sin\alpha : 0 : \sin m\beta \sin\gamma)$;
$C_1(\sin m\gamma \sin\alpha : \sin\beta \sin(1-m)\gamma : 0)$;
$C_2(\sin(1-m)\gamma \sin\alpha : \sin\beta \sin m\gamma : 0)$.

Доказательство. Покажем нахождение координат одной точки. Остальные получаются аналогично.
Рассмотрим точку A_1. Её барицентрические координаты равны $(S_{BA_1C}$:

$S_{CA_1A} : S_{AA_1B}$). [Прасолов]
$S_{BA_1C} = 0$;
$S_{CA_1A} = AC * A_1C * \sin\gamma$;
$S_{AA_1B} = BA_1 * BA * \sin\beta$;
$(0 : AC{*}A_1C{*}\sin\gamma : BA_1{*}BA{*}\sin\beta) = (0 : A_1C{*}\sin\gamma : \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}{*}BA_1{*}\sin\beta) = (0 : \frac{\sin\beta\sin(1-m)\alpha}{\sin m\alpha\sin\gamma}\sin\gamma : \sin\gamma) = (0 : \frac{\sin\beta\sin(1-m)\alpha}{\sin m\alpha\sin\gamma} : 1) = (0 : \sin(1-m)\alpha\sin\beta : \sin m\alpha\sin\gamma)$. □

Утверждение 2. *Уравнение коники $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ имеет следующий вид:*
$\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}x^2+\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}y^2+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}z^2-\frac{(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}yz-\frac{(\sin^2 m\beta+\sin^2(1-m)\beta)\sin\beta}{\sin m\beta\sin(1-m)\beta}xz-\frac{(\sin^2 m\gamma+\sin^2(1-m)\gamma)\sin\gamma}{\sin m\gamma\sin(1-m)\gamma}xy = 0$;

Доказательство. Коника в барицентрических координатах задаётся следующим уравнением:
$ux^2 + vy^2 + wz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hyx = 0$; [Yiu]
Подставим координаты, найденные в утв. 1.
$A_1 : v(\sin(1-m)\alpha\sin\beta)^2+w(\sin m\alpha\sin\gamma)^2+2f\sin(1-m)\alpha\sin\beta\sin m\alpha\sin\gamma = 0$;
$A_2 : v(\sin m\alpha\sin\beta)^2+w(\sin(1-m)\alpha\sin\gamma)^2+2f\sin(1-m)\alpha\sin\beta\sin m\alpha\sin\gamma = 0$;
$B_1 : u(\sin m\beta\sin\alpha)^2+w(\sin(1-m)\beta\sin\gamma)^2+2g\sin m\beta sin\alpha\sin(1-m)\beta\sin\gamma = 0$;
$B_2 : u(\sin(1-m)\beta\sin\alpha)^2+w(\sin m\beta\sin\gamma)^2+2g\sin(1-m)\beta\sin\alpha\sin m\beta\sin\gamma = 0$;
$C_1 : u(\sin m\gamma\sin\alpha)^2 + v(\sin\beta\sin(1-m)\gamma)^2 + 2h\sin m\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin(1-m)\gamma = 0$;
$C_2 : u(\sin(1-m)\gamma\sin\alpha)^2+v(\sin\beta\sin m\gamma)^2+2h\sin(1-m)\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin m\gamma = 0$;

Проведём следующие замены:
$\sin(1-m)\alpha = a_1$;
$\sin(1-m)\beta = b_1$;
$\sin(1-m)\gamma = c_1$;
$\sin\gamma = c_2$;
$\sin\alpha = a_2$;
$\sin\beta = b_2$;

$\sin m\alpha = a_3;$
$\sin m\beta = b_3;$
$\sin m\gamma = c_3;$

Получим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} va_1^2b_2^2 + wa_3^2c_2^2 + 2fa_1b_2a_3c_2 = 0, \\ va_3^2b_2^2 + wa_1^2c_2^2 + 2fa_1b_2a_3c_2 = 0, \\ ub_3^2a_2^2 + wb_1^2c_2^2 + 2gb_3a_2b_1c_2 = 0, \\ ub_1^2a_2^2 + wb_3^2c_2^2 + 2gb_3a_2b_1c_2 = 0, \\ uc_3^2a_2^2 + vb_2^2c_1^2 + 2hc_3a_2b_2c_1 = 0, \\ uc_1^2a_2^2 + vb_2^2c_3^2 + 2hc_3a_2b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

$v \neq 0 \Rightarrow \frac{u}{v}x^2 + y^2 + \frac{w}{v}z^2 + \frac{2f}{v}yz + \frac{2g}{v}xz + \frac{2h}{v}yx = 0.$ **(1)**
Найдём $\frac{u}{v}$, вычтя шестое уравнение системы из пятого:
$u(c_3^2a_2^2 - c_1^2a_2^2) + v(b_2^2c_1^2 - b_2^2c_3^2) = 0;$
$\frac{u}{v} = -\frac{b_2^2(c_1^2-c_3^2)}{a_2^2(c_3^2-c_1^2)};$
$\frac{u}{v} = \frac{b_2^2}{a_2^2}.$
Вычитая второе уравнение из первого, найдём
$\frac{w}{v} = \frac{b_2^2}{c_2^2}.$
$\frac{2f}{v}$ получим, разделив второе уравнение на v:
$a_3^2b_2^2 + b_2^2a_1^+\frac{2f}{v}a_1b_2a_3c_2 = 0;$
$\frac{2f}{v} = \frac{-b_2(a_3^2+a_1^2)}{a_1a_3c_2}.$
Разделив шестое уравнение на v и четвёртое уравнение на v, получим:
$\frac{2h}{v} = \frac{-b_2(c_3^2+c_1^2)}{c_1c_3a_2};$
$\frac{2g}{v} = \frac{-b_2^2(b_1^2+b_3^2)}{b_1a_2b_3c_2}.$
Подставим всё в **(1)**:
$\frac{b_2^2}{a_2^2}x^2 + y^2 + \frac{b_2^2}{c_2^2}z^2 - \frac{b_2(a_3^2+a_1^2)}{a_1c_2a_3}yz - \frac{b_2^2(b_1^2+b_3^2)}{b_1a_2b_3c_2}xz - \frac{b_2(c_1^2+c_3^2)}{c_1c_3a_2}yx = 0$
Домножим на $\frac{c_2a_2}{b_2}$:
$\frac{b_2c_2}{a_2}x^2 + \frac{c_2a_2}{b_2}y^2 + \frac{b_2a_2}{c_2}z^2 - \frac{a_2(a_3^2+a_1^2)}{a_1a_3} - \frac{b_2(b_1^2+b_3^2)}{b_1b_3}xz - \frac{c_2(c_1^2+c_3^2)}{c_1c_3}yx = 0.$
Сделаем обратную подстановку:
$\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}x^2+\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}y^2+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}z^2-\frac{(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}yz-\frac{(\sin^2 m\beta+\sin^2(1-m)\beta)\sin\beta}{\sin m\beta\sin(1-m)\beta}xz-$
$\frac{(\sin^2 m\gamma+\sin^2(1-m)\gamma)\sin\gamma}{\sin m\gamma\sin(1-m)\gamma}xy = 0.$

$\square$

Неформальное замечание. Пусть $k \to \infty$, тогда $m \to 0$ (геометрический смысл – угол рассекается на бесконечное количество частей). Тогда уравнение коники $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ будет таким:
$\frac{sin^2\alpha}{\alpha}yz + \frac{sin^2\beta}{\beta}xz + \frac{sin^2\gamma}{\gamma}xy = 0.$

Пояснение к замечанию.

Пусть $m \to 0$. Тогда
$\lim_{m\to 0}(\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}x^2 + \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}y^2 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}z^2 - \frac{(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}yz - \frac{(\sin^2 m\beta+\sin^2(1-m)\beta)\sin\beta}{\sin m\beta\sin(1-m)\beta}xz - \frac{(\sin^2 m\gamma+\sin^2(1-m)\gamma)\sin\gamma}{\sin m\gamma\sin(1-m)\gamma}xy) = \lim_{m\to 0}(m\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}x^2 + k\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}y^2 + m\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}z^2 - m\frac{(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}yz - m\frac{(\sin^2 m\beta+\sin^2(1-m)\beta)\sin\beta}{\sin m\beta\sin(1-m)\beta}xz - m\frac{(\sin^2 m\gamma+\sin^2(1-m)\gamma)\sin\gamma}{\sin m\gamma\sin(1-m)\gamma}xy) = \lim_{m\to 0}(-m\frac{(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}yz - m\frac{(\sin^2 m\beta+\sin^2(1-m)\beta)\sin\beta}{\sin m\beta\sin(1-m)\beta}xz - m\frac{(\sin^2 m\gamma+\sin^2(1-m)\gamma)\sin\gamma}{\sin m\gamma\sin(1-m)\gamma}xy)).$

$\lim_{m\to 0}(\frac{m(\sin^2(1-m)\alpha+\sin^2 m\alpha)\sin\alpha}{\sin m\alpha\sin(1-m)\alpha}) = \sin\alpha(\lim_{m\to 0}\frac{m\sin((1-m)\alpha)}{\sin m\alpha} + \lim_{m\to 0}\frac{m\sin(m\alpha)}{sin((1-m)\alpha)}) = \sin\alpha(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + 0) = \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}$

Отсюда:

$\frac{-sin^2\alpha}{\alpha}yz + \frac{-sin^2\beta}{\beta}xz + \frac{-sin^2\gamma}{\gamma}xy = 0;$
$\frac{sin^2\alpha}{\alpha}yz + \frac{sin^2\beta}{\beta}xz + \frac{sin^2\gamma}{\gamma}xy = 0$

Гипотеза. Центр коники, заданной уравнением $\frac{sin^2\alpha}{\alpha}yz + \frac{sin^2\beta}{\beta}xz + \frac{sin^2\gamma}{\gamma}xy = 0$ имеет следующие барицентрические координаты:
$(\frac{sin^2\alpha}{\alpha}(\frac{sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{sin^2\beta}{\beta} - \frac{sin^2\alpha}{\alpha}) : \frac{sin^2\beta}{\beta}(\frac{sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\beta}{\beta}) : \frac{sin^2\gamma}{\gamma}(\frac{sin^2\beta}{\beta} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\gamma}{\gamma})).$

Пояснение к гипотезе. $ux^2 + vy^2 + wz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hyx = 0$
$f = \frac{\sin^2\alpha}{2\alpha}; g = \frac{\sin^2\beta}{2\beta}; h = \frac{\sin^2\gamma}{2\gamma}$
$U = vw - f^2$, $V = wu - g^2$, $W = uv - h^2$, $F = gh - uf$, $G = hf - vg$, $H = fg - wh$.

$U = -\frac{\sin^4\alpha}{4\alpha^2}$
$V = -\frac{\sin^4\beta}{4\beta^2}$
$W = -\frac{\sin^4\gamma}{4\gamma^2}$

$F = \frac{\sin^2\beta sin^2\gamma}{4\beta\gamma}$
$G = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{4\alpha\gamma}$
$H = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{4\alpha\beta}$
Центр коники: $(U+G+H : V+F+H : W+F+G)$. [Yiu]
$U+G+H = -\frac{\sin^4\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{4\alpha\gamma} + \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{4\alpha\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{4\alpha}(-\frac{\sin^2\alpha}{\alpha} + \frac{\sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{\sin^2\beta}{\beta})$
$V+F+H = \frac{sin^2\beta}{4\beta}(\frac{sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\beta}{\beta})$;
$W+F+G = \frac{sin^2\gamma}{4\gamma}(\frac{sin^2\beta}{\beta} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\gamma}{\gamma})$.
Отсюда координаты центра коники:
$(\frac{sin^2\alpha}{\alpha}(\frac{sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{sin^2\beta}{\beta} - \frac{sin^2\alpha}{\alpha}) : \frac{sin^2\beta}{\beta}(\frac{sin^2\gamma}{\gamma} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\beta}{\beta}) : \frac{sin^2\gamma}{\gamma}(\frac{sin^2\beta}{\beta} + \frac{sin^2\alpha}{\alpha} - \frac{sin^2\gamma}{\gamma}))$.

Это новая замечательная точка в треугольнике, опубликованная в Энциклопедии Треугольных Центров профессора Кларка Кимберлинга как X(5945). [Kimberling]

Список литературы

[Yiu] Paul Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Department of Mathematics Florida Atlantic University, 2001.

[Мякишев-2002] А. Г. Мякишев, Элементы геометрии треугольника, Москва, Издательство МЦНМО, 2002.

[Заславский, Акопян] А. В. Акопян, А. А. Заславский, Геометрические свойства кривых второго порядка, Москва, Издательство МЦНМО, 2007.

[Мякишев-2013] А. Мякишев, О некоторых "треугольных"кониках, Часть 1., Москва, Математической образование №4 (68), 2013.

[Прасолов] В. Прасолов, Задачи по планиметрии, Москва, Издательство МЦНМО, 2007.

[Kimberling] Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html