Симметрия графика кубического многочлена.

Старовойт Анна.

Лемма: *График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.*

Доказательство:

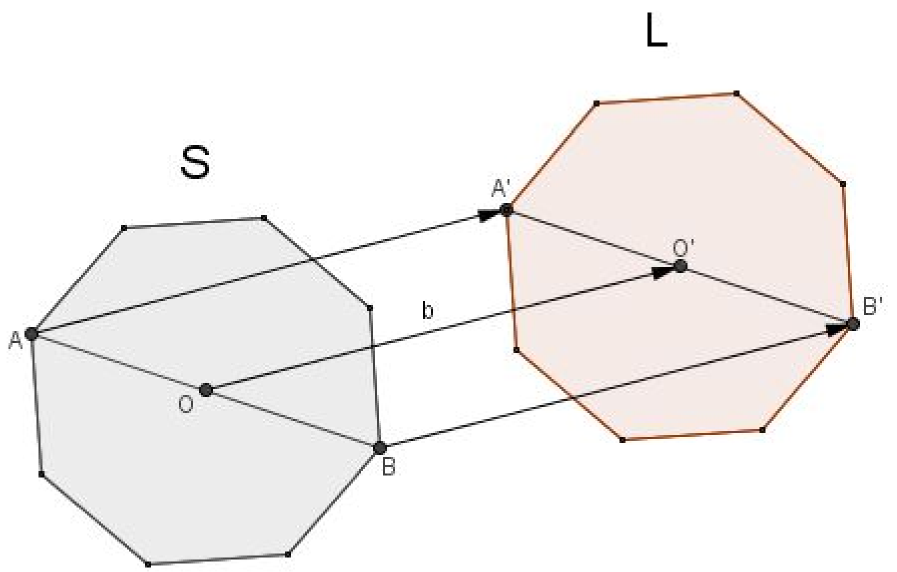
Пусть $j(z) = z^3 + pz$.

График функции j(z) имеет центр симметрии в точке (0;0) , т.к. j(z) = -j(-z).

График функции $g(z) = z^3 + pz + q$ получается из графика функции j(z) при помощи параллельного переноса. Сформулируем и докажем лемму о параллельном переносе.

Лемма: *Образ плоской центрально симметричной фигуры, полученный параллельным переносом, также имеет центр симметрии.*

Доказательство:



Пусть точка O - центр симметрии исходной фигуры S . Точка O' принадлежит фигуре L, полученной параллельным переносом на вектор $\vec{b}$. Отметим произвольную точку A' на фигуре L, в которую переходит A при переносе на $\vec{b}$. Отобразим A относительно центра симметрии (точки O), получим точку B: AB=OB. Переносом B на $\vec{b}$ получим B' ∈ L. Расстояние между точками при параллельном переносе сохраняется. Т.к. AO=OB, значит, A'O'=O'B' и O' - центр симметрии фигуры L.

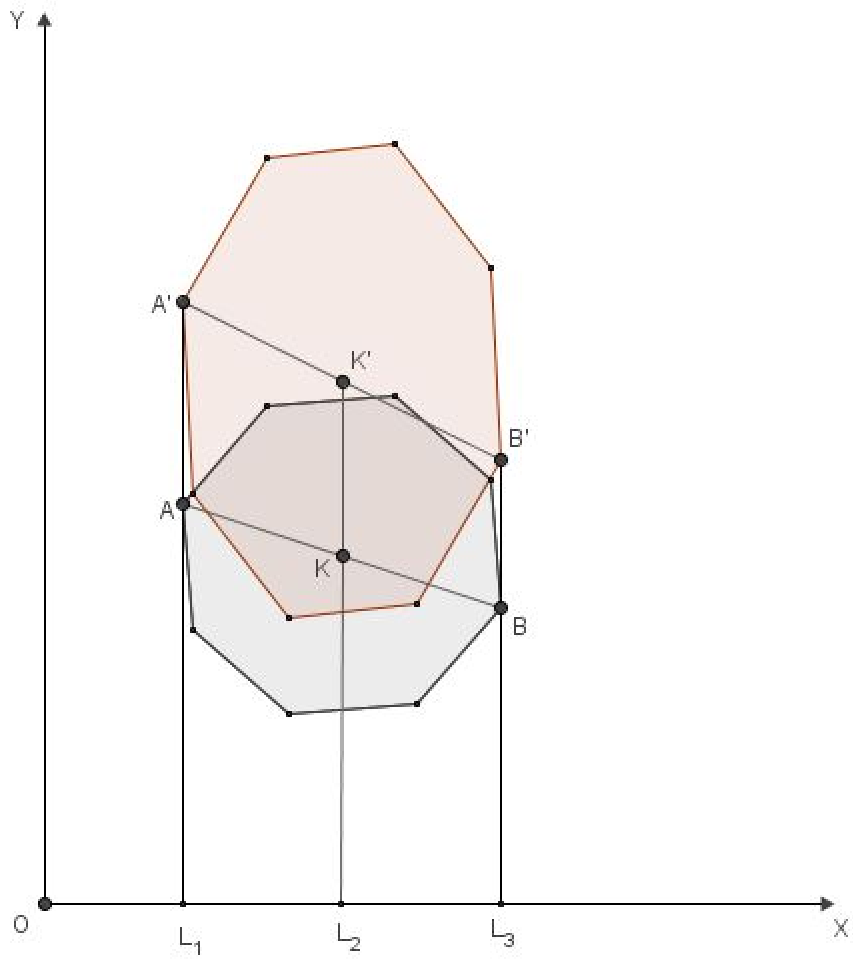
Доказано.

Функция $g(z) = z^3 + pz + q$ получена из функции $h(x) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$ путем замены переменной $x := z + \frac{b}{3a}$, значит, график этой функции получается из графика h(x) при помощи параллельного переноса.

Следовательно, по ранее доказанной лемме о параллельном переносе график функции h(x) также имеет центр симметрии.

Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. График функции f(x) получается из графика функции h(x) путем растяжения относительно оси Oy. Сформулируем и докажем лемму о растяжении(сжатии) плоской фигуры.

Лемма: *Образ плоской центрально симметричной фигуры, полученный растяжением(сжатием), также имеет центр симметрии.*



Пусть точка K - центр симметрии исходной фигуры. Точка K' принадлежит фигуре, полученной путем растяжения исходной в k раз. Значит, расстояние от Ox до K' больше расстояния от Ox до K в k раз, т.е. $L_2K' = k \cdot L_2K$. Выберем на полученной фигуре произвольную точку A'. Т.к. точка A' получена из точки A исходной фигуры, следовательно, $L_1A' = k \cdot A_1K$. Отразим точку A симметрично точке O, получим точку B: AK = KB. На пересечении прямых, содержащих A'K' и L_3B, отметим точку B'. $L_1A' \parallel L_2K' \parallel L_3B'$, т.к. L_1A, L_2K, L_3B - расстояния от точек Ox до A, K, B соответственно, значит, они перпендикулярны Ox, а, следовательно, параллельны между собой. По теореме Фалеса AK/KB=A'K'/K'B', A'K'=K'B'. По обратной теореме Фалеса $L_3B' = k \cdot L_3B$ => Точка B принадлежит полученной фигуре, которая также имеет центр симметрии K'.

Доказано.

Таким образом, график функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет центр симметрии по лемме о растяжении(сжатии) плоской фигуры. Значит, любой кубический многочлен имеет центр симметрии.

QED.