О замечательных точках циклического четырехсторонника.

I. Введение.

В этой статье мы рассмотрим фигуру, называемую *циклическим четырёхсторонником* (см. далее). Про нее известно множество фактов, главные из которых будут приведены далее. Авторам же удалось найти как новые интересные теоремы, возникающие в данной конструкции, так и красивое геометрическое доказательство известного утверждения, связанного с циклическим четырехсторонником.

Напомним, что несколько прямых на плоскости находятся в *общем положении*, если никакие три из них не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.

Определение 1. Четырехсторонник (полный четырехсторонник) - это фигура, образованная четырьмя прямыми общего положения.

Комментарий. Четырехсторонник делит плоскость на несколько частей, лишь одна из которых является четырехугольником. Если этот четырехугольник вписан в окружность, то такой четырехсторонник называется *циклическим*. *Главным треугольником* называется треугольник, образованный любыми тремя из четырех прямых, образуюших данный четырехсторонник. Таким образом, любой четырехсторонник имеет четыре главных треугольника.

Четырёхсторонник, как обычный, так и циклический, появляется во множестве задач и теорем. Например, известно, что если описать окружности около четырех главных треугольников, то они будут пересекаться в одной точке, называемой *точкой Микеля* (см. [2], задача 2.85a). Так же известно, что если взять ортоцентры тех же треугольников, то все они будут лежать на одной прямой, именуемой *прямой Обера* (см. [3], Глава 1, 48-49 п.) . Причем эта прямая будет перпендикулярна прямой, которую называют *прямой Гаусса* (см. [3], Глава 1, 45 п.) , проходящей через середины всех трех диагоналей четырехсторонника. И это лишь малая часть того, что известно про данную конструкцию.

Соглашения:

1) Через (XYZ) мы будем обозначать окружность, описанную около треугольника XYZ (аналогично и для n-угольников).

2) Если на плоскости дан выпуклый четырехугольник $KLMN$, то четырехсторонником $KLMN$ мы будем называть четырехсторонник, образованный данным четырехугольником.

3)Для любых точек X и Y примем за M_{XY} середину XY.

Обозначения. В окружность ω_1 с центром O и радиусом R вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и AD в точке Q. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Обозначим через O_{AB}, H_{AB}, O_{BC}, H_{BC}, O_{CD}, H_{CD}, O_{DA}, H_{DA} центры описанных окружностей (O) и ортоцентры (H) треугольников QAB, PBC, QCD и PDA, соответственно, а через $H_{AC}, H_{CA}, H_{BD}, H_{DB}$ ортоцентры треугольников PAC, QCA, PBD, QDB, соответственно. Определим V как точку пересечения прямых OS и PQ. Будем считать, что M — это центр масс $ABCD$, а K — точка симметричная O относительно M. Окружность, проходящую через точки O_{AB}, O_{BC} и O_{CD}, назовем ω_2. Определим h и m как прямые Обера и Гаусса четырехсторонника $ABCD$, соответственно. Обозначим через T точку пересечения ω_2 и прямой PQ, не совпадающую с V, а через X точку пересечения прямых BD и PQ.

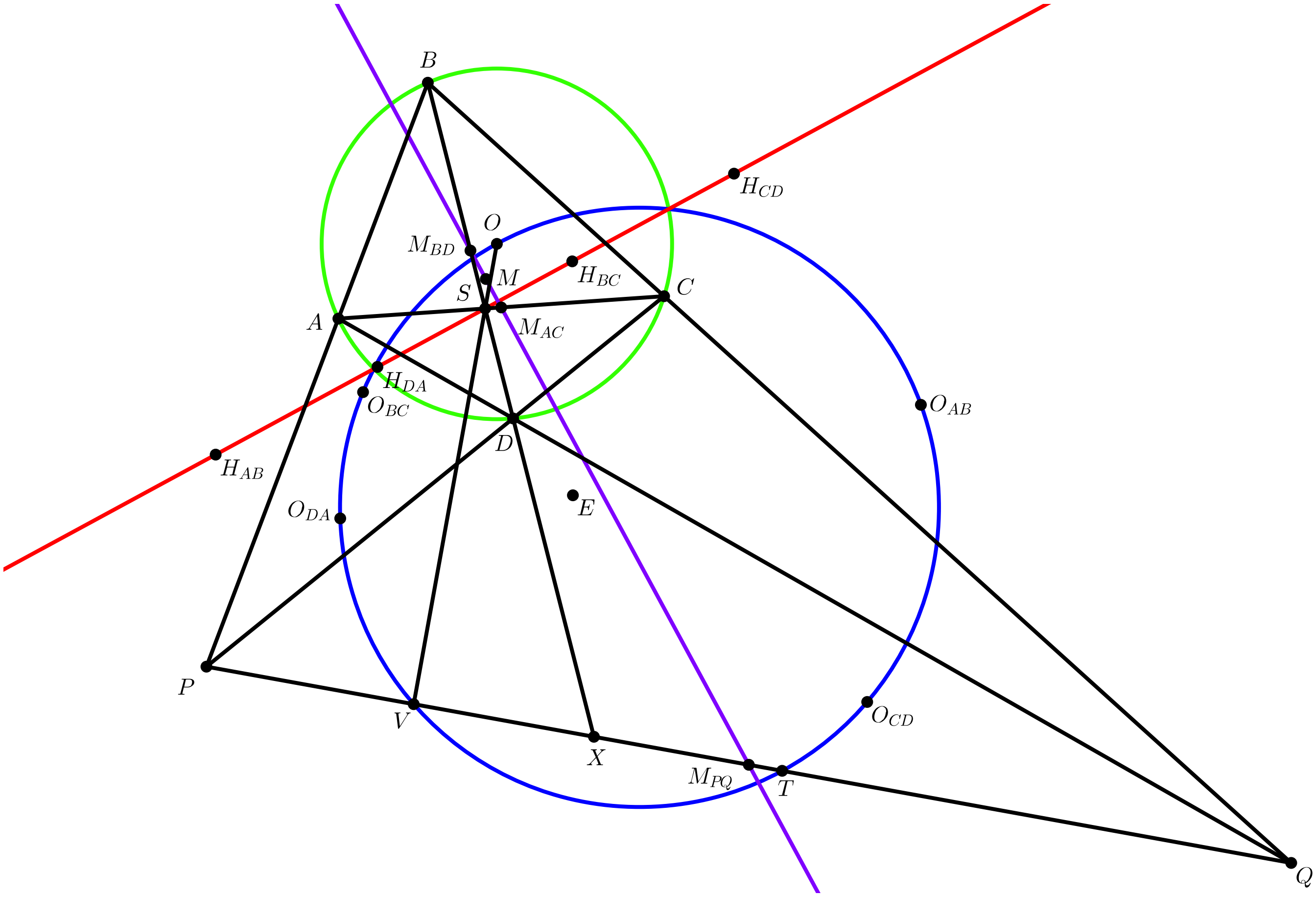

Рис. 1: Обозначения

II. Основные результаты.

Итак, один из известных фактов о полном четырехстороннике состоит в том, что четыре центра окружностей, описанных около главных треугольников, и точка Микеля лежат на одной окружности. (см. [2], задача 2.85б) Мы обозначаем эту окружность через ω_2. Оказывается, что в циклическом четырехстороннике на ней лежит еще и центр описанной окружности, а прямая h является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

Теорема 1. *В циклическом четырехстороннике точки $O, O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{DA}$ и V лежат на одной окружности ω_2, притом прямая h является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.*

Доказательство теоремы 1 приведем в параграфе IV.

Теперь исследуем другие свойства окружности ω_2. Следующая теорема устанавливает условия, при которых данная окружность касается прямой PQ.

Теорема 2. *Отрезки MS и MO равны тогда и только тогда, когда окружность ω_2 касается прямой PQ.*

Еще одним фактом о полном четырехстороннике является следующий:

Факт 1. Серединные перпендикуляры к отрезкам $O_{AB}H_{AB}, O_{BC}H_{BC}, O_{CD}H_{CD}, O_{DA}H_{DA}$ пересекаются в одной точке, называемой *точкой Эрвея.*

О самой точке Эрвея известно очень мало. Более того, авторам неизвестно ни одного чисто геометрического доказательства факта 1. Мы докажем следующую теорему, устанавливающую некоторые свойства точки Эрвея циклического четырехсторонника.

Теорема 3. *Четырёхугольники $O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB}$ и $O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA}$ вписанные, а окружности, описанные около них, концентрические, и центром этих окружностей является* *точка Эрвея.*

Доказательства теорем 2 и 3 приведены в парграфе IV. В доказательствах нам понадобятся некоторые известные геометрические факты, которые мы перечислим в следующем разделе. Некоторые из них, для удобства читателя, докажем и прокомментируем.

III. Некоторые известные факты.

Приведем доказательства ряда известных утверждений (лемма 1, утверждение 1, утверждение 2) .Идеи некоторых доказательств нам в дальнейшем понадобятся.

Лемма 1. *Рассмотрим треугольник ABC, H — его ортоцентр. K, L, M — произвольные точки на его сторонах BC, AC, AB соответственно. Тогда H является радикальным центром окружностей, с диаметрами AK, BL и CM.*

$\triangleright$ Пусть A_1, B_1, C_1 —основания высот из вершин A, B, C соответственно. Рассмотрим окружность с диаметром AB. AA_1 — радикальная ось окружностей с диаметрами AK и AB, BB_1 — радикальная ось окружностей с диаметрами BL и BA, следовательно H лежит на радикальной оси окружностей с диаметрами AK и BL. Аналогично доказывается, что H лежит на радикальной оси окружностей с диаметрами BL и CM. $\square$

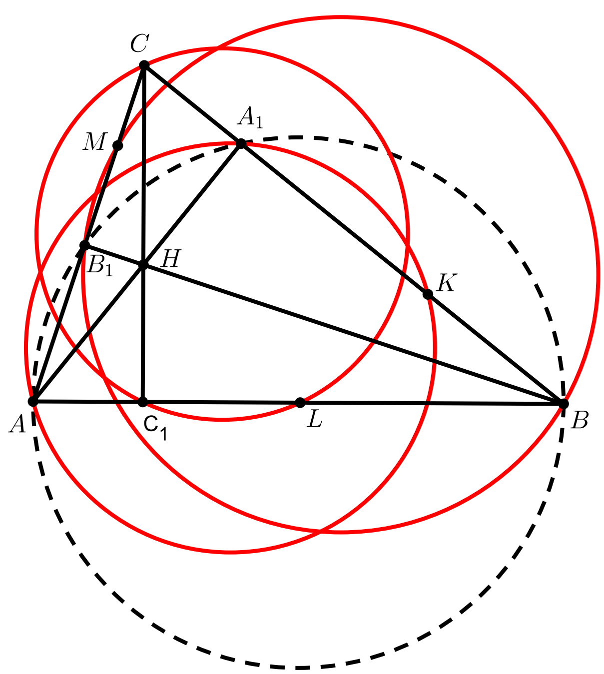

Рис. 2: Лемма 1

Утверждение 1. *$H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ лежат на одной прямой, которая называется прямой Обера четырёхсторонника $ABCD$. Точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ} лежат на одной прямой, называемой прямой Гаусса четырёхсторонника $ABCD$, перпендикулярной прямой Обера.*

▷ Рассмотрим окружности, диаметрами которых являются отрезки AC, BD и PQ. Заметим, что по *лемме 1* точки $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ являются радикальными центрами окружностей с диаметрами AC, BD и PQ. Следовательно эти окружности соосны, тогда центры этих окружностей, которыми являются точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ}, лежат на одной прямой, а точки $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$ лежат на радикальной оси, перпендикулярной линии центров этих окружностей. □

Замечание. Напомним, что ω_1 — это окружность, описанная около четырехугольника $ABCD$, а S — точка пересечения диагоналей данного четырехугольника.

Следствие 2. *Точка S лежит на прямой Обера.*

▷ Степень точки S относительно окружности с диаметром AC равна $AS \times SC$. Степень точки S относительно окружности с диаметром BD равна $BS \times SD$. Но $AS \times SC = BS \times SD$, так как это степень точки S относительно окружности ω_1. Следовательно точка S лежит на прямой Обера. □

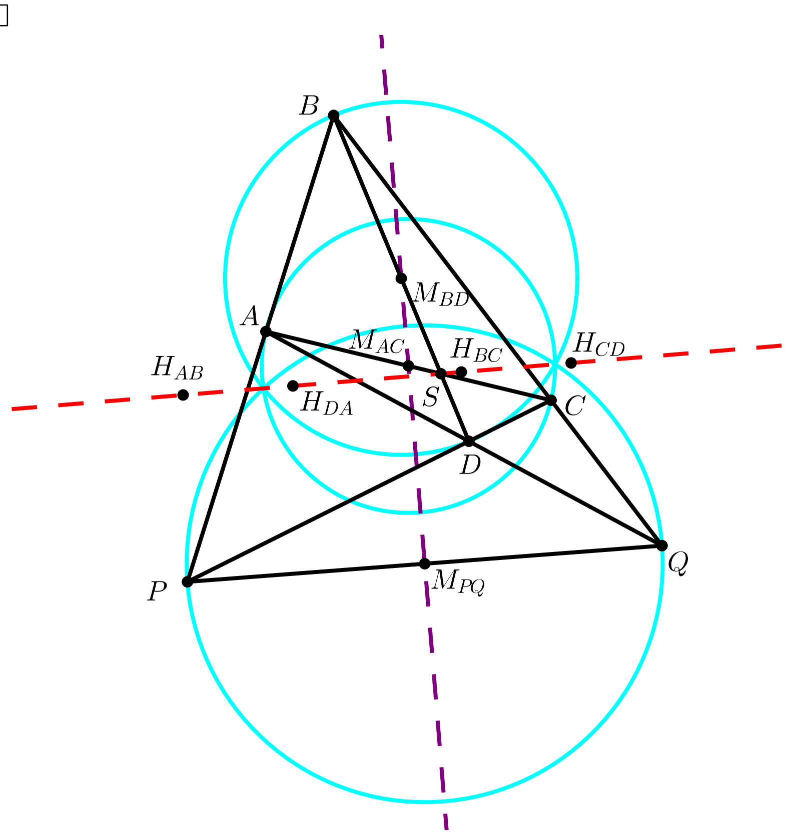

Рис. 3: Утверждение 1

Замечание. Напомним, что V — это точка Микеля четырехсторонника $ABCD$.

Утверждение 2. *Точка пересечения PQ и OS четырехсторонника $ABCD$, совпадает с V.*

$\triangleright$ Пусть V' - точка персечения OS и PQ. Заметим, что прямая PQ является полярой точки S относительно ω_1. Отсюда следует, что $OS \times OV = R^2$. Тогда при инверсии относительно ω_1 прямые AC и BD перейдут в окружности (OAC) и (OBD), соответственно, а точка S в точку пересечения этих окружностей, которой будет являться точка V'. Теперь пусть V - это точка Микеля четырехстронника $ABCD$. Давайте докажем, что она является точкой пересечения окружностей (OAC) и (OBD), из чего и последует утверждение. Для точки V' верно $\angle(AV, VC) = \angle(AV, VD) + \angle(VD, VC) = \angle(AP, PD) + \angle(QD, QC) = \angle(BP, BC) + \angle(BC, CP) + \angle(AQ, AB) + \angle(BP, BC) = 2\angle(BA, BC) = \angle(OA, OC)$, что равносильно тому, что точка V лежит на окружности (OAC). Аналогично докажем, что точка V принадлежит окружности (OBD). Так же нетрудно показать, что V принадлежит прямой PQ. Тогда точки V' и V совпадают. $\square$

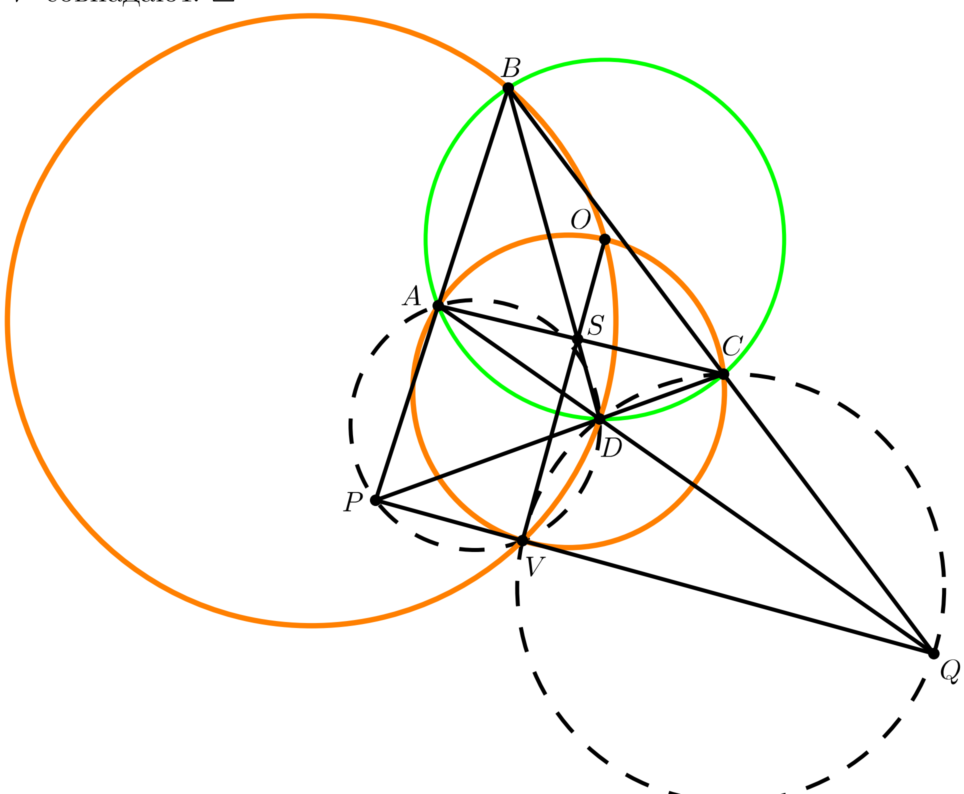

Рис. 4: Утверждение 2

Следствие 3. *Четырехугольники $OBVD$ и $OAVC$ вписанные.*

Комментарий. Связь с точкой двух велосипедистов. Заметим, что данное утверждение можно доказать иначе, установив связь с одним очень интересным геометриеским объектом.

Определение 2. Для двух окружностей, пересекающихся в точках A и B, назовем *точкой двух велосипедистов для* A такую точку K, что для любой прямой, проведенной через A и вторично пересекающей данных окружности в точках P_1 и P_2, точка K равноудаленна от P_1 и P_2.(см. [4], стр. 41)

Комментарий. Так же известно, что если O_1, O_2 - центры данных окружностей, то O_1AO_2K - параллелограмм.

Утверждение 3. *Точка двух велосипедистов для Q окружностей (QCD) и (QAB) совпадает с точкой двух велосипедстов для P окружностей (PBC) и (PAD).*

$\triangleright$ Действительно точка O равноудалена от всех вершин $ABCD$, а значит совпадает с обеими точками велосипедистов. $\square$

Альтернативное доказательство. Заметим, что $O_{AD}VOO_{BC}$ — параллелограм ввиду *утверждения 3*. Тогда прямая OV перпендикулярна прямой PQ. Кроме того, прямая OS перепендикулярна прямой PQ, так как PQ — поляра точки S. Тогда O, V, S коллинеарны. $\square$

IV. Доказательство теорем 1-3 и ряда новых результатов.

Дальнейшие факты, насколько известно авторам, являются новыми. Здесь мы открываем первый блок, в котором речь пойдет о взаимосвязи прямой Обера и окружностей ω_1 и ω_2.

Замечание. Как было сказано ранее точки O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{DA} являются центрами описанных окружностей треугольников QAB, PBC, QCD и PDA, соответственно. А через ω_2 мы обозначили окружность, описанную около треугольника $O_{AB}O_{BC}O_{CD}$.

Утверждение 4. *Точки $O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{DA}, O$ и V принадлежат одной окружности ω_2.*
$\triangleright$ Докажем, что точки O_{BC}, O_{CD}, O_{DA} и V лежат на одной окружности. Для этого нам нужно доказать, что $\angle(O_{DA}O_{BC}, VO_{DA}) = \angle(O_{CD}O_{BC}, VO_{CD})$. Данное равенство получим следующим образом: $\angle(O_{DA}O_{BC}, VO_{DA}) = \angle(O_{BC}O_{DA}, PV) + \angle(PV, O_{AD}V) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \angle(PD, DV)) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \angle(QC, QV)) = \angle(O_{BC}O_{CD}, VC) + \angle(VC, O_{CD}V) = \angle(O_{CD}O_{BC}, VO_{CD})$. Аналогично, докажем, что точки O_{BC}, O_{CD}, O_{AB} и V лежат на одной окружности.
То есть уже пять из шести точек, данных в условии, лежат на одной окружности, которой является ω_2. Теперь, показав, что четырехугольник $OO_{BC}O_{DA}O_{CD}$ вписанный, мы докажем, что точка O лежит на окружности ω_2. Для выяснения данного вопроса нам достаточно доказать, что $\angle(OO_{BC}, OO_{DA}) = \angle(O_{BC}O_{CD}, O_{CD}O_{DA})$. Заметим, что $\angle(OO_{BC}, OO_{DA}) = \angle(OM_{BC}, OM_{DA}) = \angle(QB, QA)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что $\angle(O_{BC}O_{CD}, O_{CD}O_{DA}) = \angle(O_{CD}M_{CV}, O_{CD}M_{DV} = \angle(VC, VD) = \angle(QB, QA)$. Из чего следует желаемое равенство углов. $\square$

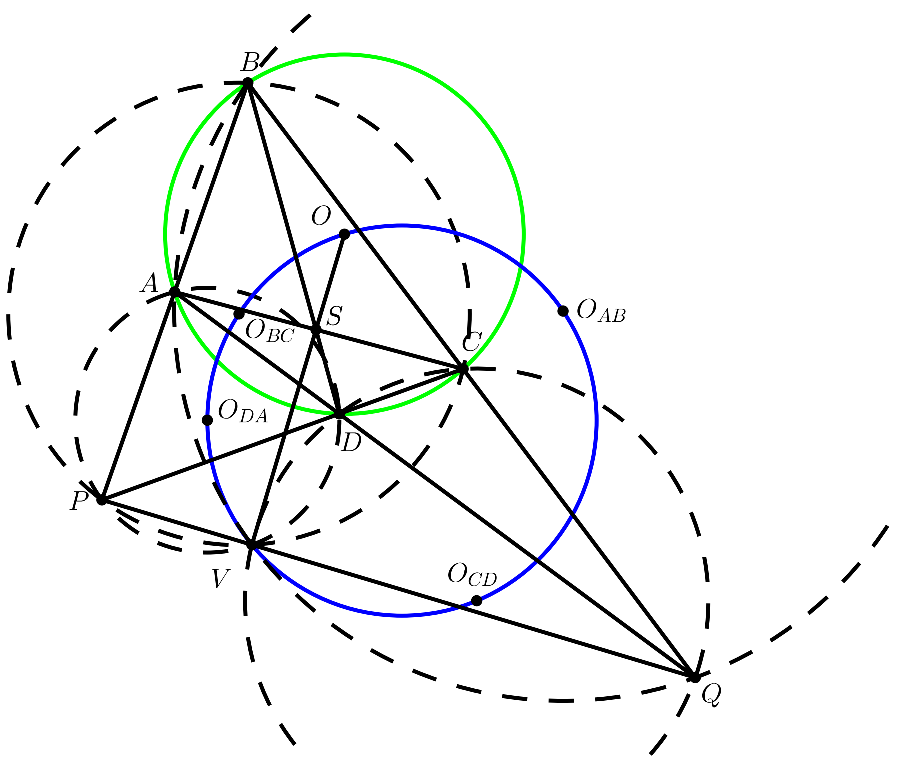

Рис. 5: Утверждение 4

Обнаружение столь замечательной окружности навело авторов на мысль об изучении ее свойств. К нашей радости, выяснилось, что она очень тесно связана с прямой h, что отражает формулировка *теоремы 1.*

Замечание. Напомним, что h и m - это прямые Обера и Гаусса четырехсторонника $ABCD$, соответственно.

Доказательство теоремы 1.
▷ Так как четырехугольник $ODVB$ вписанный по *следствию 3*, то $BS \times DS = OS \times SV$. Из этого следует, что точка S лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2. По *следствию 2* точка S лежит на прямой Обера. Значит, нам достаточно доказать, что прямая h перпендикулярна линии центров окружностей ω_1 и ω_2. Последнее на основании *утверждения 1* равносильно тому, что прямая m параллельна линии центров. Так как $OV \perp PQ$, то OT - диаметр окружности ω_2. Докажем, что $OT || M_{AC}M_{BD}$. Для этого достаточно показать, что $\angle(OT, PQ) = \angle(M_{AC}M_{BD}, PQ)$. Заметим, что из вписанности четырехугольников $OM_{BD}SM_{AC}$ и $OM_{BD}VX$ следует, что $\angle(M_{AC}M_{BD}, PQ) = \angle(M_{AC}M_{BD}, AC) + \angle(AC, PQ) = \angle(SO, OM_{BD}) + \angle(AC, PQ) = \angle(M_{BD}X, XV) + \angle(AC, PQ) = \angle(BD, PQ) + \angle(AC, PQ)$. А эта сумма, в свою очередь, равна следующему: $\angle(BD, BP) + \angle(PB, PQ) + \angle(AC, CP) + \angle(PC, PQ) = \angle(PB, PQ) + \angle(PC, PQ) = \angle(PB, PC) + 2\angle(PC, PQ) = \angle(OO_{DA}, O_{DA}D) + \angle(O_{DA}D, O_{DA}V) = \angle(OO_{DA}, O_{DA}V) = \angle(OT, TV) = \angle(OT, PQ)$. Таким образом, мы доказали требуемое равенство направленных углов. □

Следствие 4. *h является образом ω_2 при инверсии относительно ω_1.*

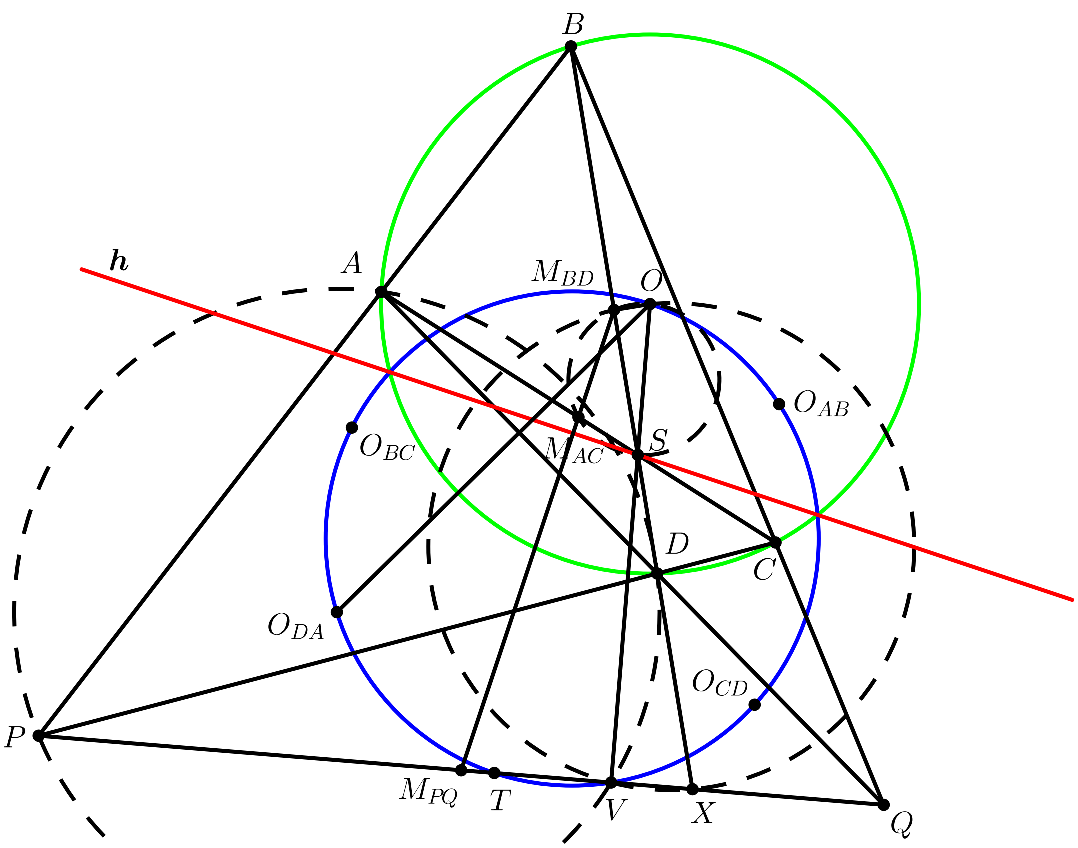

Рис. 6: Теорема 1

Кроме того, оказывается, что у окружности ω_2 есть свойство, неожиданно связывающее ее с центром масс M четырехугольника $ABCD$, что сформулировано в *теореме 2*.

Доказательство теоремы 2.

Замечание. Точка K по определению является образом симметрии O относительно M.

$\triangleright$ Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая вспомогательная

Лемма 2. *Точка K лежит на прямой h.*

$\triangleright$ Из точек M_{AB} и M_{CD} опустим перпендикуляры h_1 и h_2 на прямые CD и AB, соответственно. Тогда прямые h_1, h_2, OM_{AB} и OM_{CD} образуют параллелограмм. При этом точкой пересечения его диагоналей будет середина отрезка $M_{AB}M_{CD}$, которой является точка M. А из этого следует, что точка K является точкой пересечения прямых h_1 и h_2. Пусть K' — середина $H_{DA}H_{BC}$. Тогда по теореме Фалеса прямая $K'M_{AB}$ перпендикулярна AB. Аналогично прямая $K'M_{CD}$ перпендикулярна CD. Отсюда следует, что K и K' совпадают. $\square$

Замечание. Напомним, что через $H_{AC}, H_{CA}, H_{BD}, H_{DB}$ мы обозначили ортоцентры треугольников PAC, QCA, PBD, QCD, соответственно.

Следствие 5. *Отрезки $H_{AB}H_{DA}$ и $H_{BC}H_{CD}$ равны.*

Замечание. Примечательно, что помимо этого K является центром параллелограмма, $H'_{AC}H'_{CA}H'_{BD}H'_{DB}$, что можно нетрудно доказать, воспользовавшись *леммой 2*, поэтому читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно.

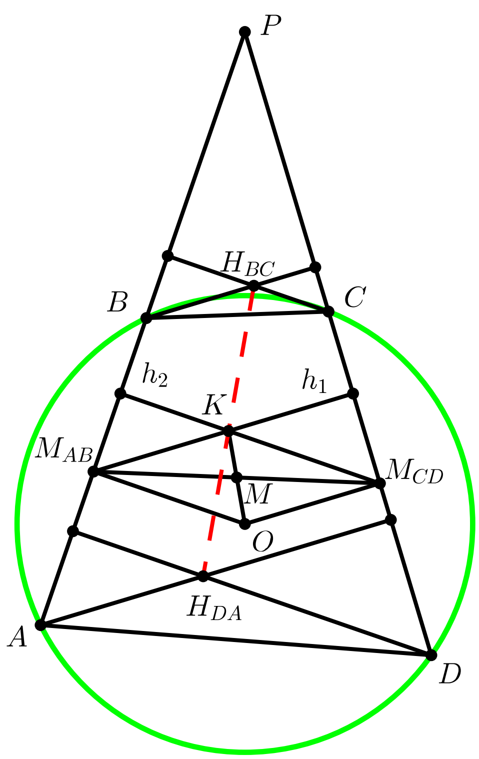

Рис. 7: Лемма 2

Докажем, что если $MO = MS$, то окружность ω_2 касается прямой PQ. На основании *леммы 2* можно сделать вывод, что $KS \perp SO$, что эквивалентно тому, что $h \perp OV$. Но, как мы знаем $h \perp OT$. Из чего следует, что точки V и T совпадают.

Если же окружность ω_2 касается прямой PQ, то $OV \perp h$, а значит $KS \perp SO$, что равносильно равенству MS и MO. □

Замечание. Данная теорема может быть доказана и без обращения к *лемме 1*, но такой путь не выглядит столь изящно.

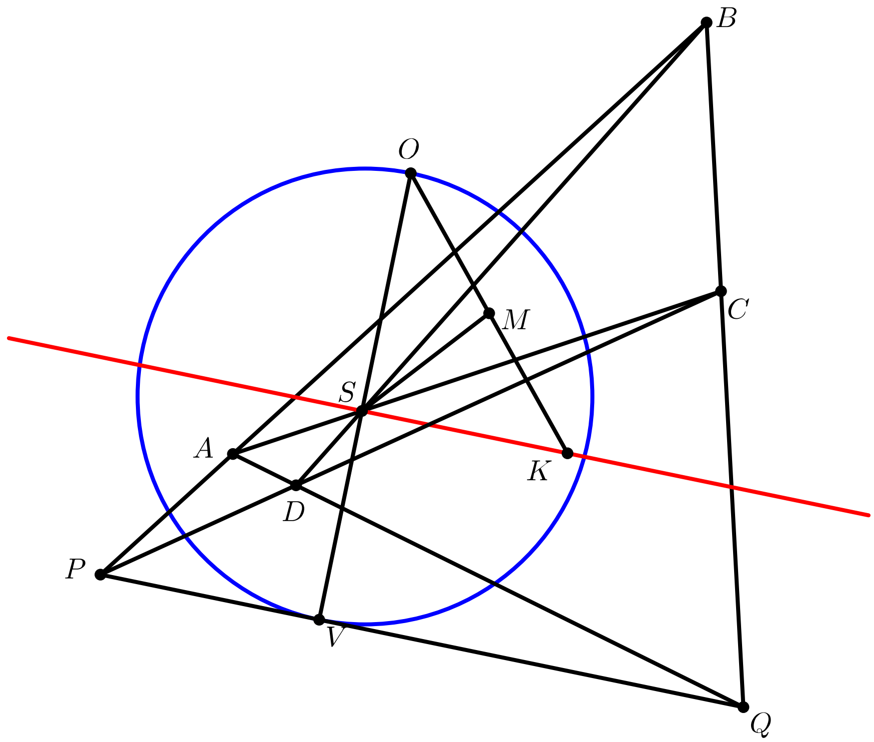

Рис. 8: Теорема 2

Следствие 6. *Точка P лежит на прямой $H_{CA}H_{DB}$* (аналогичное верно и для точки Q).
▷ Действительно, для этого достаточно заметить, что треугольники $AH_{AB}B$ и $CH_{CD}D$ перспективны на основании *следствия 2*. Тогда для них верна теорема Дезарга, из которой и следует коллинерность точек P, H_{CA}, и H_{DB}. □

Давно известна тесно связанная с нашим сюжетом теорема, утверждающая, что в любом четырёхстороннике $ABCD$ серединные перпендикуляры к отрезкам $O_{AB}H_{AB}, O_{BC}H_{BC}, O_{CD}H_{CD}, O_{DA}H_{DA}$ пересекаются в одной точке. Данный объект называется точкой Эрвея четырёхугольника $ABCD$. К сожалению, не известно красивого геометрического доказательства этого факта в общем случае (доказателсьство, основанное на алгебраических метода, может быть найдено в [1], задача № 262) . Однако, авторы придумали абсолютно геометрическое доказательство для случая циклического четырёхсторонника, основывающееся на следующем утверждении.

Теорема 3. *Четырёхугольники $O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB}$ и $O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA}$ вписанные, а окружности, описанные около них, концентрические, и центром этих окружностей является точка Эрвея.*

▷ Докажем, что четыре точки O_{AB}, H_{CD}, O_{CD} и H_{AB} лежат на одной окружности. Для этого достаточно доказать, что $QO_{CD} \times QH_{AB} = QO_{AB} \times QH_{CD}$. Как известно $QH_{AB} = 2QO_{AB} \cdot |cos(\angle BQA)|; QH_{CD} = 2QO_{CD} \cdot |cos(\angle BQA)|$. Следовательно данное равенство верно. Аналогично доказывается, что точки $O_{DA}, H_{BC}, O_{BC}, H_{DA}$ лежат на одной окружности. Теперь заметим, что $O_{AB}, O_{CD}, O_{DA}, O_{BC}$ — вершины равнобедранной трапеции. Действительно, прямые $O_{AB}O_{CD}$ и $O_{DA}O_{BC}$ параллельны, так как являются серединными перпендикулярами к отрезками VQ и VP, соответственно, а точки $O_{AB}, O_{CD}, O_{DA}, O_{BC}$ лежат на одной окружности. Значит серединные перпендикуляры к $O_{AB}O_{CD}$ и $O_{DA}O_{BC}$ совпадают. В свою очередь, из *леммы 2* и *следствия 5* следует, что серединные перпендикуляры к отрезкам $H_{AB}H_{CD}$ и $H_{BC}H_{DA}$ совпадают. Тогда рассмотрим точку пересечения серединных перпендикуляров к $H_{AB}H_{CD}$ и $O_{AB}O_{CD}$. Данная точка является центром окружностей $(O_{AB}H_{CD}O_{CD}H_{AB})$ и $(O_{DA}H_{BC}O_{BC}H_{DA})$. Тогда это и есть точка Эрвея четырёхугольника $ABCD$. □

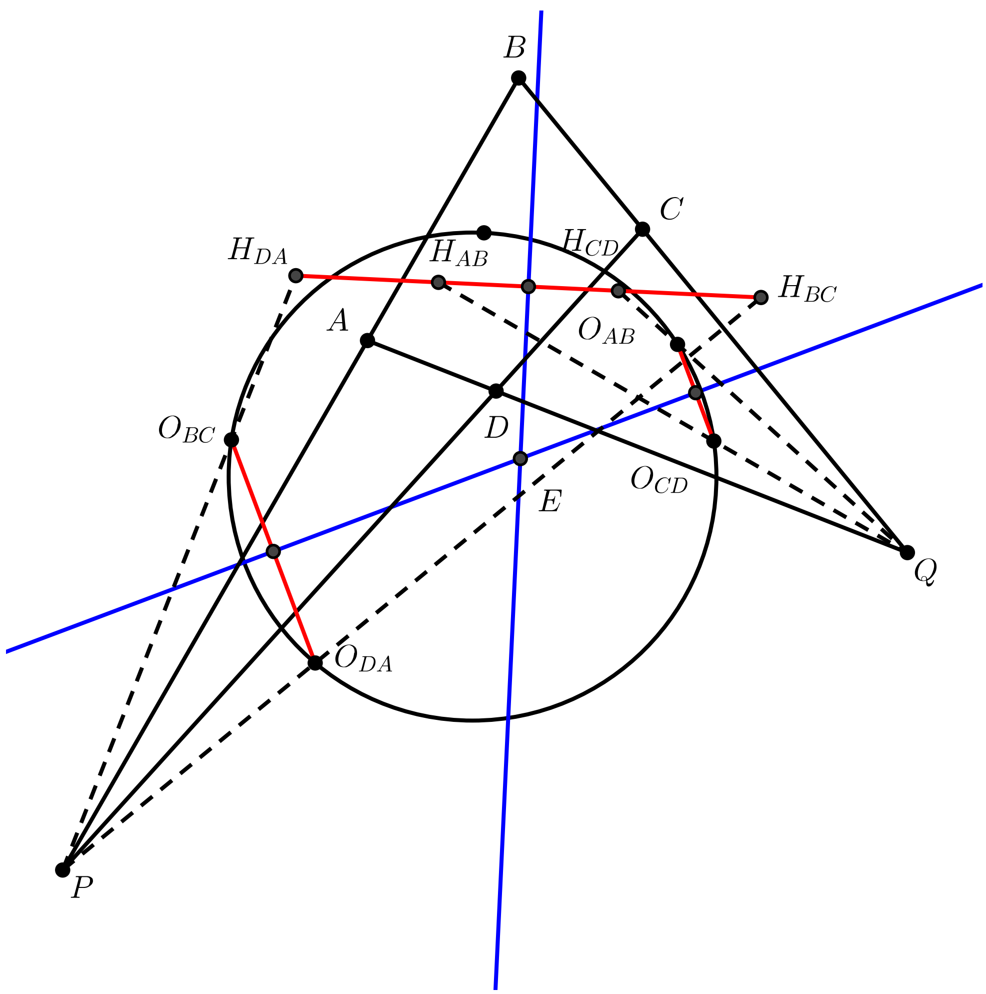

Рис. 9: Теорема 3.

V. Некоторые следствия.

Теорема 4. *Прямая Эйлера треугольника PDA параллельна прямой BC тогда и только тогда, когда прямая Эйлера треугольника QCD параллельна прямой AB.*

$\triangleright$ Заметим, что условие $O_{DA}H_{DA} \parallel BC$ равносильно тому, что $O_{DA}H_{DA} \perp O_{DA}H_{BC}$, так как прямая $O_{DA}H_{BC} \perp BC$, а это равносильно тому, что центром окружности, описанной около треугольника $O_{DA}H_{BC}H_{DA}$, является середина отрезка $H_{BC}H_{DA}$, то есть на основании *теоремы 3* точки K и E совпадают. Аналогично, то, что $O_{CD}H_{CD} \parallel AB$ равносильно тому, что точки K и E совпадают. Значит эти два утверждения равносильны. $\square$

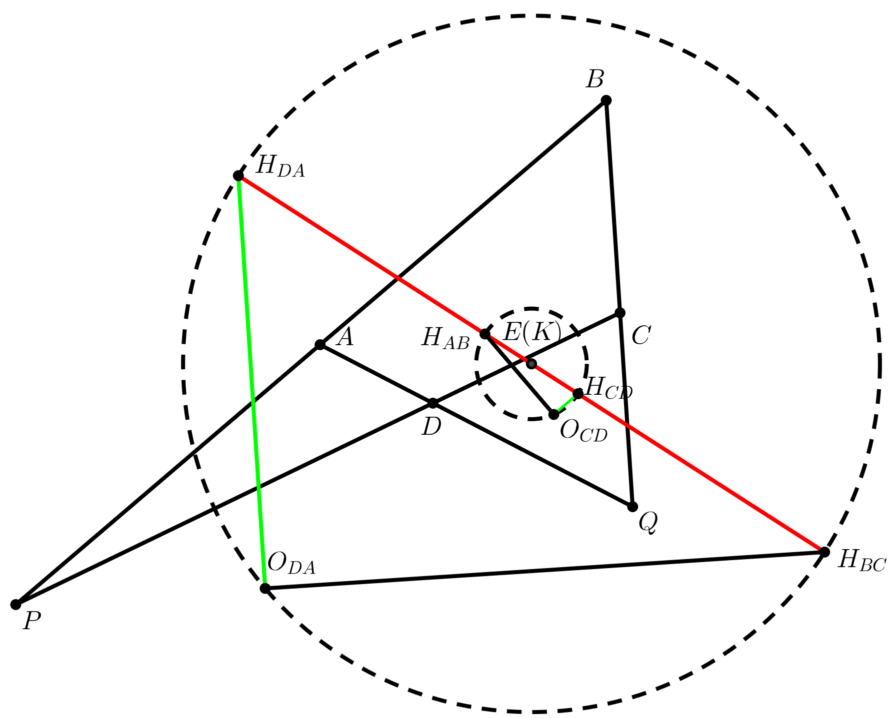

Рис. 10: Теорема 4.

Теперь мы вновь поговорим о точке двух велосипедистов (см. параграф III утв. 2) и ее связях с нашей конструкцией.

Следствие 7. *Точки двух велосипедистов любой пары окружностей из* $(QAB), (PBC), (QCD)$ *и* (PAD) *и их точки пересечения отличной от* V*, лежат на* w_2 (на рис. 11 они обозначены K_A, K_B, K_C, K_D).

$\triangleright$ Заметим, что для любых двух окружностей, пересекающихся в точках A и B, и центрами O_1 и O_2 точка двух велосипедистов K для точки A лежит на окружности (O_1BO_2) ввиду того, что O_1AO_2K - параллелограмм.
Тогда, возвращаясь к поставленной задачи, возьмем любые две окружности. Тогда на основании вышесказанного получим, что соответствующая им точка двух велосипедистов лежит на окружности, проходящей через их центры и V, то есть на w_2. $\square$

Следствие 8. *Точки* (на рис.11 они обозначены V_A, V_B, V_C, V_D) *двух велосипедистов любой пары окружностей из* $(QAB), (PBC), (QCD)$ *и* (PAD)*, кроме пар* (QAB) *и* (QCD)*,* (PBC) *и* (PAD)*, и* V*, лежат на серединном перпендикуляре к* PQ*.*

$\triangleright$ Как мы помним, $O_{AB}, O_{CD}, O_{DA}, O_{BC}$ — вершины равнобедренной трапеции. Тогда середины отрезков $O_{DA}O_{AB}, O_{DA}O_{CD}, O_{BC}O_{AB}, O_{BC}O_{CD}$ лежат на средней линии данной трапеции перпендикулярной PQ. Интересующие нас точки двух велосипедистов это образы этих середин при гомотетии с центром V и коэффициентом 2. Кроме того, заметим, что по определению точка двух велосипедистов для (PAD) и (QCD) равноудалена от P и Q, так как V лежит на PQ. Таким образом получаем, что вся эта пряма является серединным перпендикуляром к PQ. $\square$

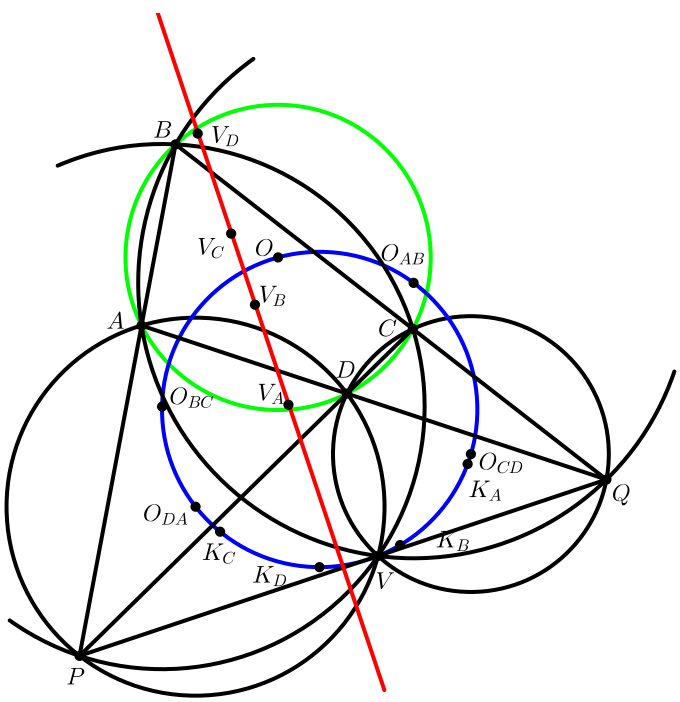

Рис. 11: Следствие 7.

Список литературы.

1. *Шарыгин И. Ф.* Библиотечка «Квант». Выпуск 017. Задачи по геометрии.
2. *Прасолов В. В.* "Задачи по планиметрии". — 4-е изд., дополненное — М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2001. — 584 с.
3.*Ефремов Д. Д.* "Новая геометрия треугольника". Одесса, 1902 — 334 с.
4.*Протасов В.Ю.* "О двух велосипедистах и вишневой косточке Квант №3, 2008г.