Об объемах некоторых тел вращения

Попов Михаил. ГБОУ Лицей №1586.
Научный руководитель: Аленников М.А.

Зафиксируем числа $k \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$.

Соединим последовательно точки самонепересекающейся замкнутой ломаной.
$A(q^n;0) \longrightarrow A_0(q^n;k) \longrightarrow A_1(q^{n+1};k-1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{k-1}(q^{n+(k-1)};1) \longrightarrow A_k(q^{n+k};0) \longrightarrow A(q^n;0)$
В итоге получим плоский многоугольник с вершинами в соответствующих точках.

Ступенчатым конусом назовем тело вращения, получаемое вращением плоского многоугольника определенного выше, вокруг оси абсцисс.

В дальнейшем *ступенчатый конус* будем обозначать через Θ, а его объем через $V(\Theta)$

Теорема (основная)

Зафиксируем числа $k \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Объем произвольного ступенчатого конуса выражается следующей формулой:

$$V(\Theta) = \frac{1}{3}\pi \left(\left(\sum_{i=0}^{k-2} \left(q^{n+i+1} - q^{n+i}\right) \left(3k^2 - 2ki + 3i^2 - 3k + 3i + 1\right) \right) + q^{n+k} - q^{n+(k-1)} \right)$$

Доказательство.

Разрежем Θ плоскостями перпендикулярными оси абсцисс и проходящими через точки $A_i\left(q^{n+i};0\right)$, где $0 \leq i \leq k$. Тогда Θ разобьется на $k-1$ усеченных конусов и на один конус. Поэтому нам необходимо найти сумму объемов $k-1$ усеченных конусов и конуса.

Для нахождения объема усеченного конуса поступим так. Рассмотрим плоский многоугольник с вершинами в точках $\widehat{A_i}\left(q^{n+i};0\right)$, $A_i\left(q^{n+i};k-i\right)$, $A_{i+1}\left(q^{n+i+1};k-(i+1)\right)$, $\widehat{A_{i+1}}\left(q^{n+i+1};0\right)$. После вращения такого многоугольника вокруг оси абсцисс, мы получим усеченный конус с радиусами $R = k-i$; $r = k-i-1$ и высотой $h = q^{n+i+1} - q^{n+i}$. Обозначим такой усеченный конус через Θ_i

Воспользуемся хорошо известной формулой для вычисления объема усеченного конуса а именно:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h \left(R^2 + Rr + r^2\right)} \tag{1}$$

Имеем,
$R^2 = (k-i)^2 = k^2 - 2ki + i^2$
$r^2 = (k-i-1)^2 = k^2 - 2ki + i^2 - 2k + 2i + 1$
$Rr = (k-i)(k-i-1) = k^2 - 2ki + i^2 - k + i$
$R^2 + Rr + r^2 = 3k^2 - 6ki + 3i^2 - 3k + 3i + 1$
Последние равенства подставим в (1), тогда имеем

$$V(\Theta_i) = \frac{1}{3}\pi \left(q^{n+i+1} - q^{n+i}\right) \left(3k^2 - 6ki + 3i^2 - 3k + 3i + 1\right)$$

Теперь необходимо просуммировать такие объемы усеченных конусов учитывая, что $0 \leq i \leq k-2$

$$\sum_{i=0}^{k-2} V(\Theta_i) = \frac{1}{3}\pi \sum_{i=0}^{k-2} \left(q^{n+i+1} - q^{n+i}\right) \left(3k^2 - 6ki + 3i^2 - 3k + 3i + 1\right) \tag{2}$$

Таким образом равенство (2) выражает суммарный объем $k-1$ усеченных конусов на которые мы в начале доказательства разбили наш ступенчатый конус. Нам осталось найти объем конуса получаемый вращением треугольника с вершинами в точках $(q^n + (k-1);0)$; $(q^n + (k-1);1)$ и $\left(q^{n+k};0\right)$ вокруг оси абсцисс. Очевидно, что он выражается по формуле

$$\widehat{V} = \frac{1}{3}\pi \left(q^{n+k} - q^{n+(k-1)}\right) \tag{3}$$

Для завершения доказательства сложим равенства (2) и (3), окончательно имеем,

$$V(\Theta)=\frac{1}{3}\pi\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left(q^{n+i+1}-q^{n+i}\right)\left(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1\right)\right)+q^{n+k}-q^{n+(k-1)}\right)$$

Зафиксировав числа $k\in\mathbb{N}$; $k\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ заметим, что $V(\Theta)$ является функцией от переменной q.
Этот факт будем обозначать $V(\Theta)=V_q(\Theta)$
Тогда имеет место следующее утверждение:

Теорема
При фиксированных $k\in\mathbb{N}$; $k\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{V_{q+1}(\Theta)}{V_q(\Theta)}\right)=1$$

Доказательство.

Обозначим искомый предел через Λ

$$V_q(\Theta)=\frac{1}{3}\pi\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left(q^{n+i+1}-q^{n+i}\right)\left(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1\right)\right)+q^{n+k}-q^{n+(k-1)}\right)$$

$$V_{q+1}(\Theta)=\frac{1}{3}\pi\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left((q+1)^{n+i+1}-(q+1)^{n+i}\right)\left(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1\right)\right)+(q+1)^{n+k}-(q+1)^{n+(k-1)}\right)$$

Тогда имеем
$\Lambda=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}\pi\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left((q+1)^{n+i+1}-(q+1)^{n+i}\right)\left(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1\right)\right)+(q+1)^{n+k}-(q+1)^{n+(k-1)}\right)}{\frac{1}{3}\pi\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}(q^{n+i+1}-q^{n+i})(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1)\right)+q^{n+k}-q^{n+(k-1)}\right)}\right)$
Избавившись от $\frac{1}{3}\pi$ имеем,
$\Lambda=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left((q+1)^{n+i+1}-(q+1)^{n+i}\right)\left(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1\right)\right)+(q+1)^{n+k}-(q+1)^{n+(k-1)}\right)}{\left(\left(\sum_{i=0}^{k-2}(q^{n+i+1}-q^{n+i})(3k^2-2ki+3i^2-3k+3i+1)\right)+q^{n+k}-q^{n+(k-1)}\right)}\right)$

Заметим, что в числителе и знаменателе после соответствующего раскрытия скобок получатся многочлены от переменной q причем степень каждого многочлена $n+k$. Так же легко заметить ,что мономы при старшей степени, что числителя , что знаменателя имеют вид q^{n+k}

В силу выше сказанного имеем,

$$\Lambda=\lim_{q\to\infty}\frac{q^{n+k}+A(q)}{q^{n+k}+B(q)}=\lim_{q\to\infty}\frac{1+\frac{A(q)}{q^{n+k}}}{1+\frac{B(q)}{q^{n+k}}}=1$$

Где $A(q)$ и $B(q)$ это многочлены степени $n+k-1$ получившиеся при раскрытие скобок в числителе и знаменателе соответственно.