Условие задачи

На сторонах треугольника ABC построены прямоугольники ABB_1A_1, BCC_2B_2 и CAA_2C_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение задачи

Сделаем несколько обозначений.

- H_A, H_B, H_C — основания перпендикуляров, опущенных соответственно с A, B, C на A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.
- M_A, M_B, M_C — середины A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, соответственно.
- A_3, H'_B, M'_B — точки, получающиеся из B_2, H_B, M_B переносом на вектор $\overline{BA}$.
- H'_C, M'_C — точки, получающиеся из H_C, M_C переносом на вектор $\overline{CA}$.

Докажем, что H_AA, H_BB, H_CC пересекаются в одной точке, используя теорему Чевы в виде синусов.

В самом деле, углы, на которые делит прямая H_AA $\angle C$, равны $\angle AA_1A_2$ и $\angle AA_2A_1$, то есть отношение их синусов равно $\dfrac{AA_2}{AA_1}$; аналогично, два других отношения синусов равны $\dfrac{BB_2}{BB_1}$ и $\dfrac{CC_2}{CC_1}$.

Если мы перемножим эти три отношения, то получим 1, так как $AA_2 = BB_1, BB_2 = CC_1, CC_2 = AA_1$. Обозначим их точку пересечения за H.

Далее, обозначим точку пересечения серединных перпендикуляров треугольника $A_1A_2A_3$ через O', через O — точку, получающуюся из O' переносом на вектор $\overline{AH}$.

Докажем, что O — искомая точка пересечения. Для этого заметим, что $H_BM_B = H'_BM'_B$ равно проекции вектора $\overline{AO'}$ на прямую A_1A_3, что равно проекции вектора $\overline{HO}$ на прямую B_1B_2, из чего следует $M_BO \perp B_1B_2$.

Аналогично, $M_CO \perp C_1C_2$ и $M_AO \perp A_1A_2$, ч. т. д.

Источник

Книга "Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии" (под редакцией А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б. Скопенкова). Задача 9.1.7. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

Коган Евгений, 9 класс, школа "Интеллектуал"