

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЕЖАМИ.

Максим Лошаков ¹

Задача. Можно ли заполнить пространство одинаковыми непересекающимися ежами? Еж — это фигура, получившаяся объединением куба и всех кубов, граничащих с ним по грани.

Ответ: да, можно. Расположим центры ежей во всех точках с целочисленными координатами (x, y, z) , для которых $x + 2y + 3z$ делится на 7.

Решение. Тогда достаточно доказать, что для любых трех целых x, y, z выражения

$$x + 2y + 3z, \quad (x + 1) + 2y + 3z, \quad (x - 1) + 2y + 3z,$$

$$x + 2(y + 1) + 3z, \quad x + 2(y - 1) + 3z, \quad x + 2y + 3(z + 1), \quad x + 2y + 3(z - 1)$$

дают разные остатки при делении на 7. Из этого будет следовать, что среди них встречаются все остатки.

Заметим, что любые два данных выражения различны и различаются не более, чем на 6. Если же какие-то два выражения дают одинаковые остатки при делении на 7, то их разность делится на 7. Значит, либо они равны, либо отличаются более, чем на 6, чего не бывает среди данных выражений. Значит, все выражения дают разные остатки при делении на 7, что требовалось доказать.

¹Школа "Интеллектуал"