Интерпретация биномиального коэффициента в виде кратной суммы

Скворцов Дмитрий, 7 “Б”, Лицей Вторая Школа

Научные руководители: Скопенков Аркадий Борисович, Ковальджи Александр Кириллович, Сиротовский Илья Яковлевич, Пешнин Александр Михайлович

Содержание

1. ***Формулировка основных результатов***
   Теорема 1

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1}\sum_{i_3=1}^{i_2}\cdots\sum_{i_{k-2}=1}^{i_{k-3}}\sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} i_{k-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

Приводятся доказательство методом математической индукции и идея прямого доказательства.

Теорема 2

Обозначим

$$d_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Тогда

$$d_k(n) = \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k-1} d_i(n),$$

где

$$n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(n+i) = \sum_{i=1}^{k} a_{i,k} n^i$$

(Называется «верхняя степень»).

2. ***Пример***

Приведем формулу суммы чисел от 1 до n: n(n + 1)/2.

Если сосчитать сумму первых сумм чисел от 1 до n, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} k = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)}{2}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6} = C_{n+2}^{3}$$

Частный случай теоремы доказан.

3. Идея первого доказательства

Доказательство основано на том, что указанная в формулировке сумма равна количеству упорядоченных неубывающих наборов длины k из чисел от одного до n. А это количество равно количеству упорядоченных возрастающих наборов длины k из чисел от одного до n+k-1.

4. Тождество для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i+k-2}^{k-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

Доказательство леммы

Доказательство по индукции по n

База:

$$\sum_{i=1}^{1} C_{i+k-2}^{k-1} = C_{1+k-2}^{k-1} = 1 = C_{k}^{k} = C_{1+k-1}^{k}$$

Шаг. Предположим, что лемма верно для n=m

$$\sum_{i=1}^{m} C_{i+k-2}^{k-1} = C_{m+k-1}^{k}$$

Тогда следует доказать, что и лемма верна и для n=m+1, то есть верно следующее:

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{i+k-2}^{k-1} = C_{m+k}^{k}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{i+k-2}^{k-1} = \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_{i+k-2}^{k-1} + C_{m+k-1}^{k-1} = C_{m+k-1}^{k} + C_{m+k-1}^{k-1} = C_{m+k}^{k}$$

Предпоследнее равенство является правилом Паскаля для *m+k=l*

5. Второе доказательство теоремы 1

Введем обозначение:

$$\overline{C}_{n}^{k} = C_{n+k-1}^{k}$$

(Называется «сочетания с повторениями»).

Используя эти обозначения, лемма принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{C}_{i}^{k-1} = \overline{C}_{n}^{k}$$

А теорема соответственно:

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \cdots \sum_{i_{k-2}=1}^{i_{k-3}} \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} i_{k-1} = \overline{C}_{n}^{k}$$

Нетрудно заметить, что лемма — это рекуррентная формула для теоремы 1, поэтому теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Запишем иную формулу для сочетания с повторениями, использующую верхнюю степень:

$$\overline{C}_{n}^{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

По лемме имеем:

$$\frac{n^{\underline{k+1}}}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\underline{k}}}{k!} = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\sum_{i_2=1}^{k} a_{i_2,k} i_1^{i_2}}{k!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{i,k} d_i(n)}{k!} = d_k(n) - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k-1} d_i(n).$$

Теорема доказана.