

# Интерпретация биномиального коэффициента в виде кратной суммы

Скворцов Дмитрий, 7 "Б", Лицей Вторая Школа

## Содержание

1. Формулировка основных результатов
2. Пример
3. Идея первого доказательства теоремы 1
4. Тождество для биномиальных коэффициентов
5. Второе доказательство теоремы 1
6. Доказательство теоремы 2

### 1. Формулировка основных результатов

#### Теорема 1

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \dots \sum_{i_{k-2}=1}^{i_{k-3}} \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} i_{k-1} = C_{n+k-1}^k$$

Приводятся доказательство методом математической индукции и идея прямого доказательства.

#### Теорема 2

Обозначим

$$d_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k.$$

Тогда

$$d_k(n) = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k-1} d_i(n),$$

где

$$n^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i) = \sum_{i=1}^k a_{i,k} n^i$$

(Называется «верхняя степень»).

### 2. Пример

Приведем формулу суммы чисел от 1 до n:  $n(n+1)/2$ .

Если сосчитать сумму первых сумм чисел от 1 до n, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i k = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n (i^2+i)}{2}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n (i^2+i)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = C_{n+2}^3$$

Частный случай теоремы доказан.

### 3. Идея первого доказательства

Доказательство основано на том, что указанная в формулировке сумма равна количеству упорядоченных неубывающих наборов длины  $k$  из чисел от одного до  $n$ . А это количество равно количеству упорядоченных возрастающих наборов длины  $k$  из чисел от одного до  $n+k-1$ .

### 4. Тождество для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i=1}^n C_{i+k-2}^{k-1} = C_{n+k-1}^k$$

#### Доказательство леммы

Доказательство по индукции по  $n$

База:

$$\sum_{i=1}^1 C_{i+k-2}^{k-1} = C_{1+k-2}^{k-1} = 1 = C_k^k = C_{1+k-1}^k$$

Шаг. Предположим, что лемма верна для  $n=m$

$$\sum_{i=1}^m C_{i+k-2}^{k-1} = C_{m+k-1}^k$$

Тогда следует доказать, что и лемма верна и для  $n=m+1$ , то есть верно следующее:

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{i+k-2}^{k-1} = C_{m+k}^k$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{i+k-2}^{k-1} = \sum_{i=1}^m C_{i+k-2}^{k-1} + C_{m+k-1}^{k-1} = C_{m+k-1}^k + C_{m+k-1}^{k-1} = C_{m+k}^k$$

Предпоследнее равенство является правилом Паскаля для  $m+k=l$

### 5. Второе доказательство теоремы 1

Введем обозначение:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

(Называется «сочетания с повторениями»).

Используя эти обозначения, лемма принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \bar{C}_i^{k-1} = \bar{C}_n^k$$

А теорема соответственно:

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \dots \sum_{i_{k-2}=1}^{i_{k-3}} \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} i_{k-1} = \bar{C}_n^k$$

Нетрудно заметить, что лемма — это рекуррентная формула для теоремы 1, поэтому теорема 1 доказана.

### 6. Доказательство теоремы 2

Запишем иную формулу для сочетания с повторениями, использующую верхнюю степень:

$$\bar{C}_n^k = \frac{n^{\bar{k}}}{k!}$$

По лемме имеем:

$$\frac{n^{\bar{k+1}}}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^n \frac{i^{\bar{k}}}{k!} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\sum_{i_2=1}^k a_{i_2,k} i_1^{i_2}}{k!} = \frac{\sum_{i=1}^k a_{i,k} d_i(n)}{k!}.$$

Поскольку

$$a_{k,k} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^k a_{i,k} d_i(n) = d_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} d_i(n) = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1}$$

Теорема доказана.

**Благодарность.**

Автор благодарит А. Б. Скопенкова за ценные замечания при подготовке текста и А. К. Ковальджи за конструктивное обсуждение работы.