Игнат Романов   прямая Эйлера n-угольника

Введение

В геометрии довольно известен факт: в треугольнике точка пересечения медиан, центр описанной окружности и точка пересечения высот лежат на одной прямой, причем точка пересечения медиан делит отрезок от центра описанной до ортоцентра в отношении 1 к 2 соответственно. Прямая, содержащая эти точки, называется прямой Эйлера.

Одно из обобщений на вписанный четырехугольник было доказано А.Г. Мякишевым: в любом вписанном четырехугольнике ортоцентр(см. ниже), центр масс* и центр описанной окружности лежат на одной прямой, и центр масс делит отрезок от центра описанной окружности до ортоцентра в отношении 1 к 1.

Мы докажем аналогичную теорему для произвольного вписанного n-угольника.

Определение 1 Определим ортоцентр вписанного n-угольника рекурсивно. Ортоцентром треугольника называется точка пересечения высот. Назовем ортоцентром вписанного n-угольника точку пересечения отрезков, соединяющих вершины n-угольника и ортоцентры n-1-угольников на оставшихся вершинах.

Теорема 1 Ортоцентр вписанного n-угольника существует.

Заметим, что если ортоцентр существует, то он единственен.

Теорема 2 Ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности n-угольника лежат на одной прямой.

*Центром масс в работе мы будем называть центр масс системы точек, совпадающих с вершинами многоугольников, а не центр масс фанерного многоугольника.

В работе мы будем считать доказательство прямой Эйлера в треугольнике общеизвестным. И подробно остановимся на, упомянутой ранее прямой Эйлера в четырехугольнике, чтобы читателю было проще осознать логику определений.

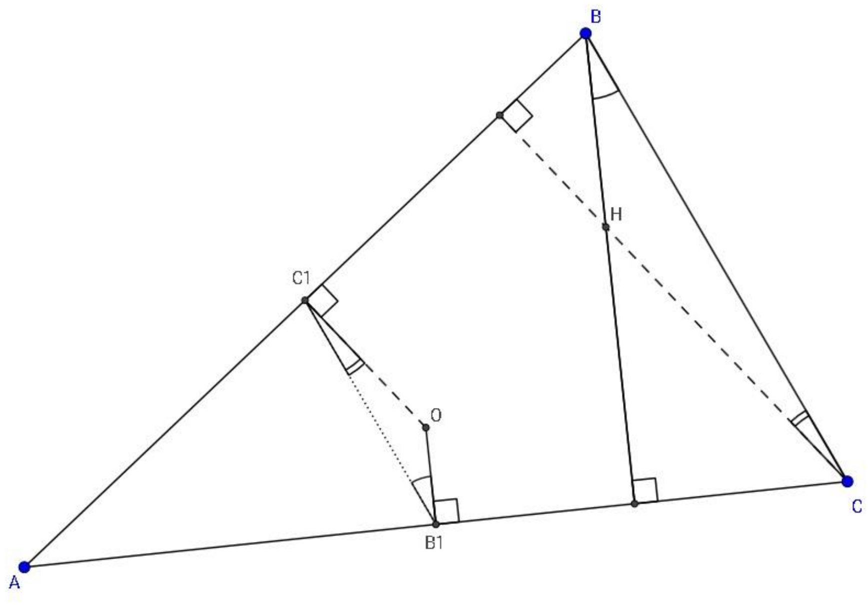
Определение ортоцентра

Определение 2 (ортоцентр вписанного четырехугольника): рассмотрим во вписанном четырехугольнике четыре треугольника, образованных двумя соседними сторонами и диагональю. Возьмем ортоцентр каждого и соединим с оставшейся вершиной четырехугольника (не входящей в треугольник ортоцентр которого мы рассматриваем). Точку пересечения этих четырех отрезков назовем ортоцентром четырехугольника.

Теперь докажем существование и единственность ортоцентра четырехугольника.

Лемма 1 (рис. 1)

В треугольнике расстояние от ортоцентра до вершины вдвое больше чем расстояние от противоположенной этой вершине стороны до центра описанной окружности.



(рис. 1)

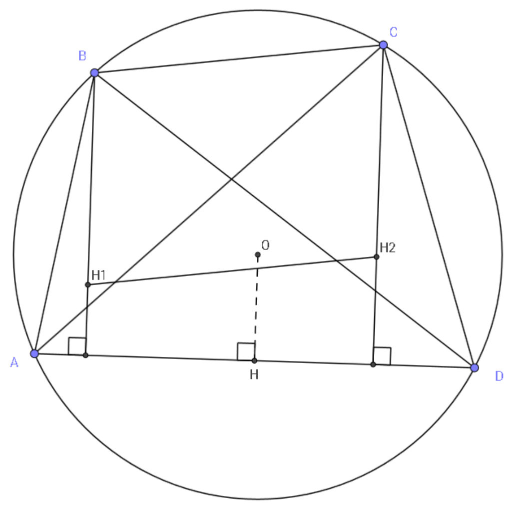
Доказательство

Пусть дан треугольник ABC, H- его ортоцентр, O центр описанной окружности и B1,C1 - середины сторон AB и AC соответственно.

Заметим, что т.к. B1C1- средняя линяя треугольника ABC, и углы B1C1O и HCB равны, а также и углы OB1C1 и HBC равны, то треугольник OB1C1 подобен треугольнику HBC с коэффициентом 2. Откуда получаем утверждение леммы.

Лемма 2 (рис. 2)

В любом вписанном четырехугольнике две соседние вершины и ортоцентры треугольников, образованных этими вершинами и стороной не прилежащей ни к одной из них, образуют параллелограмм.



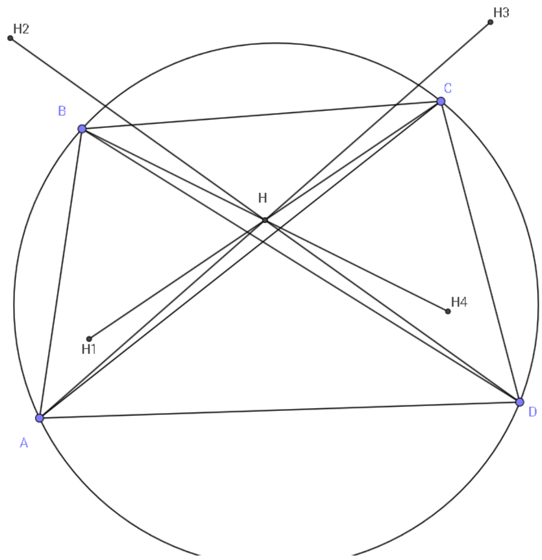
(рис. 2)

Доказательство

Пусть дан вписанный четырехугольник ABCD, центр описанной вокруг него окружности O, H- середина AD и H1,H2 – ортоцентры треугольников ABD и ACD соответственно.

Рассмотрим O- центр описанной окружности ABCD. Пусть H – середина AD. Тогда HO параллельно BH1 и CH2, а также по лемме 1 HO вдвое меньше BH1 и CH2, следовательно BH1 и CH2 параллельны и равны, что значит что BH1H2C - параллелограмм. Что и требовалось доказать.

Далее докажем корректность определения, т.е. существование и единственность ортоцентра вписанного четырехугольника. (рис. 3)



(рис. 3)

Заметим, что т.к. две вершины четырехугольника и противоположенные им ортоцентры образуют, параллелограмм то отрезки их соединяющие являются диагоналями, а значит, делятся пополам точкой пересечения. И так как это верно для каждых двух соседних отрезков то они все пересекаются в одной точке.

ортоцентр вписанного n-угольника

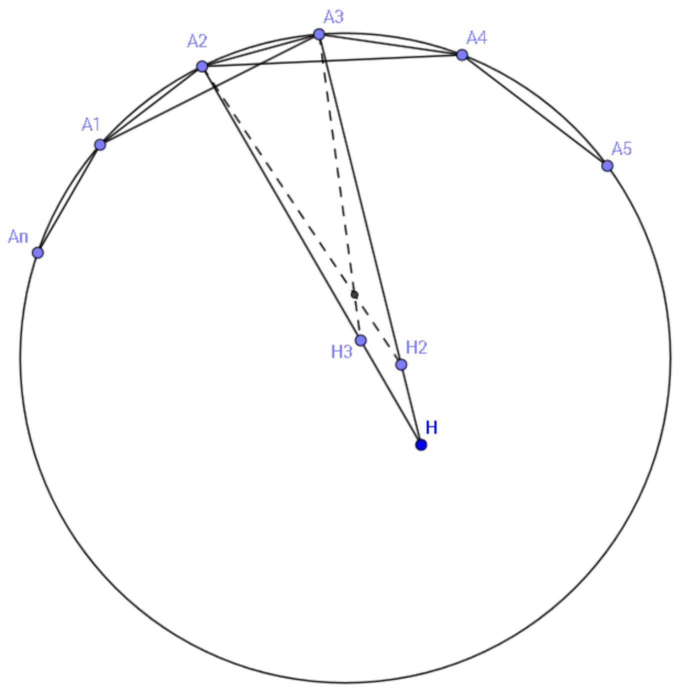
Докажем **теорему 1**

Заметим, что говорить об ортоцентре n-угольника мы можем, только если определен ортоцентр (n-1)-угольника, следовательно, наше доказательство будет основано на индукции по количеству вершин.

Докажем существование и единственность ортоцентра во вписанном n-угольнике. Базой является разобранный выше четырехугольник.

Также мы по индукции докажем утверждение о том что отрезки точкой пересечения делятся в отношении 1/(n-3) от ортоцентра (n-1)-угольника до вершины. Для четырехугольника это очевидно верно.

Предположим, что для любого вписанного (n-1)-угольника ортоцентр существует и при проведении любого отрезка, соединяющего вершину с ортоцентром противоположенного ей (n-2)-угольника, он лежит на этом отрезке. И делит его в отношении 1 к n-4 (т.к. это (n-1)-угольник) от ортоцентра (n-2)-угольника к вершине, тогда рассмотрим вписанный n-угольник. (рис. 4)



(рис. 4)

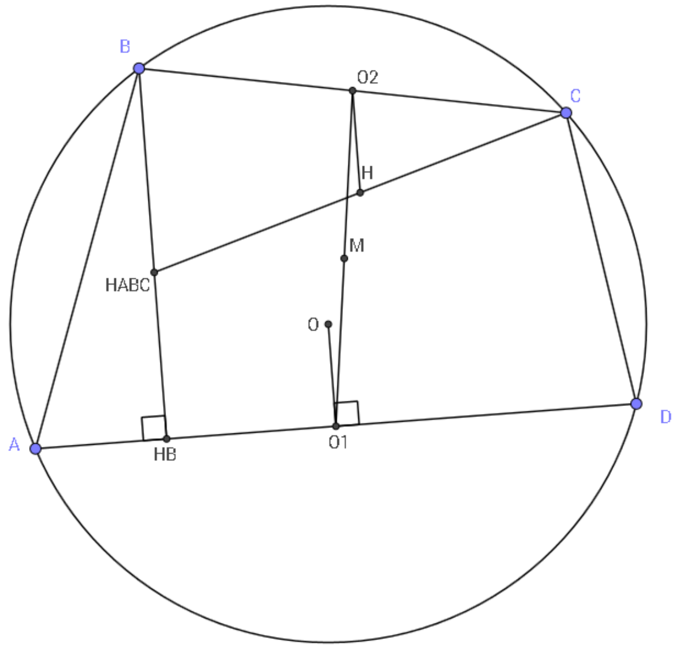
Пусть есть n-угольник A1…An.

Рассмотрим треугольники A1A2A3 и A2A3A4. Соединим A2 с H2- ортоцентром (n-1)- угольника без A2 и A3 с H3- ортоцентром (n-1)- угольника без A3, но заметим что (n-1)-угольник без A2 и у (n-1)-угольник без A3 содержат общий (n-2)- угольник без A2 и A3. Рассмотрим его ортоцентр H, по предположению индукции H2 лежит на HA3, а H3 на HA2. А также H2 и H3 делят соответствующие отрезки в отношении 1/(n-4), следовательно треугольник HH3H2 подобен треугольнику HA2A3 с коэффициентом (n-3), что значит, что A3H3 пересекается с A2H2 и точкой пересечения делятся в отношении 1/(n-3). (меньшая часть к большей) Аналогичными рассуждениями получаем что любые два соседних отрезка пересекаются и делятся точкой пересечения в отношении 1/(n-3), следовательно они все пересекаются в одной точке. Переход индукции доказан.

Прямая Эйлера n-угольника

Определение 3 (прямая Эйлера четырехугольника) Прямой Эйлера во вписанном четырехугольнике назовем прямую на которой лежит центр масс, ортоцентр и центр описанной. (рис. 5)

Докажем существование прямой Эйлера во вписанном четырехугольнике.
Пусть дан вписанный четырехугольник ABCD.

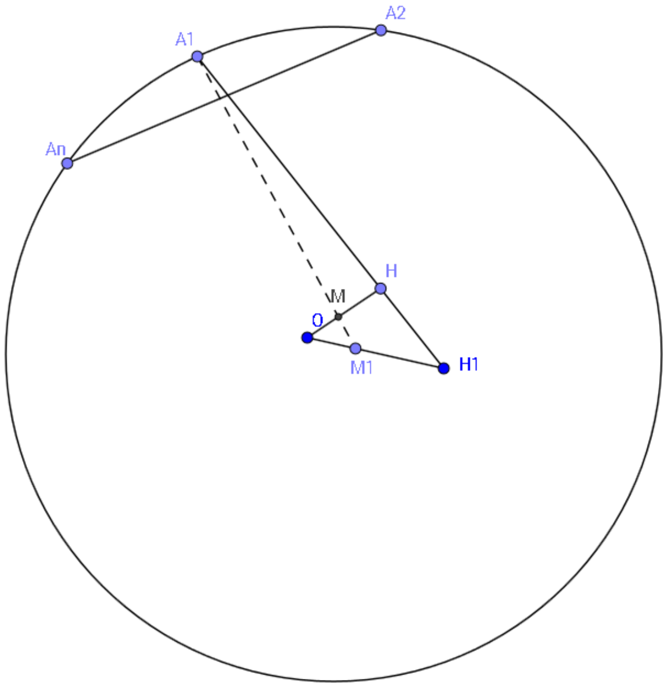


(рис. 5)

Докажем, что O (центр описанной окружности), M (центр масс) и H (ортоцентр) лежат на оной прямой! Пусть O2 середина BC и O1 середина AD, тогда ясно, что M лежит на середине O1O2. Далее опустим высоту BHB из B на AD и отметим на ней ортоцентр треугольника ABD (HABC), заметим что из определения ортоцентра четырехугольника следует, что H лежит на середине (HABC)C. Также заметим, что O2H параллельно BHB и O2H равен половине B(HABC) (как средняя линяя), а также по лемме1 O1O равен половине B(HABC), а также параллелен. Следовательно OO2HO1- параллелограмм. А т.к. M середина O2O1, то она лежит на диагонали OH. А значит, что эти три точки действительно лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Теперь докажем **теорему 2**

Теперь попробуем определить прямую Эйлера в произвольном вписанном n-угольнике. По аналогии с треугольником и четырехугольником докажем, что в любом выпуклом вписанном n-угольнике центр масс, центр описанной окружности и ортоцентр лежат на одной прямой, где центр масс лежит между центром описанной окружности и ортоцентром и делит этот отрезок в отношении (n-2)/2 соответственно. Докажем индукцией. (рис. 6)



(рис. 6)

База: четырехугольник (разобран выше)

Предположим, что для произвольного вписанного (n-1)- угольника существует прямая Эйлера на которой выполняются указанные соотношения. Тогда возьмем вписанный n-угольник и соединим вершину A1 с H1- ортоцентром (n-1)- угольника без A1. Из определения ортоцентра n-угольника следует, что он (H) лежит на A1H1 и делит этот отрезок в отношении 1/(n-3). Далее возьмем O-центр описанной окружности n-угольника и заметим, что он совпадает с центром описанной окружности (n-1)- угольника без A1. Следовательно по предположению индукции прямая OH1 является прямой Эйлера этого (n-1)-угольника, а значит на ней лежит M1- центр масс этого (n-1)-угольника, а также верно что M1H1/M1O=2/(n-3). После заметим, что центр масс всей фигуры лежит на отрезке A1M1 и делит его в отношении (n-1)/1 соответственно, применив теорему Менелая для треугольника H1A1M1 и точек H, M, O получаем соотношение 1/(n-3)*(n-1)/1*(n-3)/(n-1) что равно 1 а значит что эти три точки лежат на одной прямой, далее рассмотрим в каком соотношении точка M делит отрезок OH, применив теорему Менелая в обратную сторону получаем 2/(n-3)*a/b*(n-3)/(n-2)=1 откуда a/b=(n-2)/2. Переход индукции доказан.