Всероссийская олимпиада школьников по математике, региональный этап, 2010 год, задача 4.

Условие: В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB' и CC' — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой $B'C'$, лежит на стороне BC.

Нестандартное решение: пусть A, B, C - вершины данного треугольника, причём $\angle A$ = 60° и $|AB|$ <$|AC|$ (для $|AB|$ = $|AC|$ треугольник равносторонний и $C'B'$ – средняя линия). Проведём прямую AD так, чтобы $\angle BAD$ = 60° и D лежала на продолжении стороны BC за точку B. Докажем, что точки D,C',B' лежат на биссектрисе $\angle ADC$.

Поскольку C' – точка пересечения биссектрис в треугольнике ACD, $\angle CDC'$ = $\angle ADC'$. Значит $\angle DC'C$ = 150° и $\angle BOC$ = $\angle C'OB'$ = 120° (как угол между биссектрисами). Следовательно, точки A,B',O,C' лежат на одной окружности (поскольку $\angle C'OB'$ + $\angle C'AB'$ = 180°), значит $\angle OC'B'$ = $\angle OAB'$ = 30°. Значит $\angle DC'B'$ = 180°, то есть точки D,C',B' лежат на одной прямой, при этом они находятся на биссектрисе $\angle ADC$. Из этого следует, что все точки на луче DA перейдут при отражении относительно прямой DB' на луч DC, следовательно точка A перейдёт в точку, принадлежащую прямой BC. Факт, что образ точки A при этом окажется внутри отрезка BC, оставляем в качестве упражнения читателю.