Ковалев Тимофей и Львов Алексей.

Новое свойство замечательной точки X(671) в треугольнике.

Теорема. Рассмотрим ΔABC. Проведем высоту BB_1, медианы AA_0 и CC_0. Рассмотрим точку пересечения описанных окружностей ΔAB_1A_0 и ΔCB_1C_0, отличную от B_1. Назовём эту точку точкой B_Γ. Аналогично определим точки A_Γ и C_Γ. Тогда прямые AA_Γ, BB_Γ и CC_Γ пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть O - центр описанной окружности ΔABC. Применим инверсию с центром в точке B и радиусом окружности, равному $\sqrt{\frac{ac}{2}}$ (a, b, c – стороны ΔABC), а затем симметрию относительно биссектрисы $\angle ABC$. Тогда A переходит в A_0, C переходит в C_0 и B_1 переходит в O, так как лучи BB_1 и BO изогональны, и $BB_1 \cdot BO = \frac{ac}{2}$. Следовательно, описанные окружности ΔAB_1A_0 и ΔCB_1C_0 соответственно переходят в описанные окружности ΔA_0OA и ΔC_0OC. Тогда B_Γ переходит в точку B'_Γ пересечения этих окружностей, отличную от O. Аналогично определим точки A'_Γ и C'_Γ. Тогда заметим, что BB_Γ и BB'_Γ - изогональные лучи относительно $\angle ABC$ (аналогично для A'_Γ и C'_Γ), следовательно, если мы докажем, что AA'_Γ, BB'_Γ и CC'_Γ пересекаются в одной точке, то мы доказали исходную задачу. Докажем, что $A'_\Gamma = B'_\Gamma = C'_\Gamma$, т.е. описанные окружности ΔAOA_0, ΔBOB_0 и ΔCOC_0 пересекаются в 2 точках. Для этого достаточно доказать, что центры данных окружностей лежат на 1 прямой. Заметим, что центр описанной окружности ΔBOB_0 является точкой пересечения серединных перпендикуляров к BO и OB_0. Сделаем гомотетию с центром в точке O с коэффициентом 2. Назовём образы центров описанных окружностей ΔAOA_0, ΔBOB_0 и ΔCOC_0 точками A^*, B^* и C^*. Тогда A^* является точкой пересечения BC и прямой, перпендикулярной AO в точке A, т.е. касательной в точке A к описанной окружности ΔABC (аналогично для точек B^* и C^*). Тогда надо доказать, что A^*, B^* и C^* лежат на 1 прямой, что следует из теоремы Паскаля для точек A, A, B, B, C и C, лежащих на описанной окружности ΔABC.

$\square$