Обобщенная задача Аполлония

Е. А. Морозов, научный руководитель: Ф. К. Нилов

Аннотация

В работе делается попытка обобщения исследования известной задачи Аполлония о построении окружности, касающейся 3-х данных. Рассматривается вопрос о максимальном возможном числе таких окружностей, в случае если исходных окружностей больше 3-х. Доказано, что если не все исходные окружности касаются в одной точке, то в случае 4-х исходных окружностей имеется не более 6-и решений задачи Аполлония, а в случае 5-и исходных окружностей — не более 4-х. Также дано описание всех четверок окружностей, для которых количество решений максимально.

1 Введение

Задача (классическая задача Аполлония). *Построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся каждой из 3-х данных.*

Так сформулировал задачу известный древнегреческий геометр Аполлоний Пергский в III в. до н. э. С тех пор было придумано много остроумных решений первоначальной задачи, однако нас будет интересовать лишь вопрос о максимально возможном числе искомых окружностей. Известно, что классическая задача имеет не более 8-и решений (см., например, [1]). Мы рассмотрим обобщение этого вопроса на случаи 4-х и 5-и окружностей.

Ключевую роль в наших рассуждениях играет инверсия. Данное преобразование плоскости позволяет упростить конфигурацию исходных окружностей и осуществить перебор. Поэтому перед доказательством основных теорем мы подробнее рассмотрим конструкции, к которым нас приведет это преобразование (см. п. 3). Также мы используем один из результатов полного перебора всех случаев классической задачи Аполлония, описанного в [1].

Среди приемов, которые мы используем для доказательства различных случаев основной теоремы будут: подсчет количества точек пересечения окружностей, использование их взаимного расположения на плоскости, а также факт об объединении решений классической задачи в пары, использующий алгебраическую интерпретацию окружности — об этом подробнее в п. 5.

2 Формулировки основных результатов

Обобщенной окружностью (объектом) назовем окружность, прямую или точку на плоскости.

Две обобщенные окружности *обобщенно касаются*, если выполнено одно из следующих условий:

1. Это две касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямая.
2. Это две параллельные прямые.
3. Это точка, лежащая на окружности или прямой.

Так как все касания у нас будут обобщенными, то для краткости вместо «обобщенно касаются» мы будем говорить просто «касаются».

Заметим, что посредством стереографической проекции плоскость, с добавленной к ней бесконечно удаленной точкой ∞, можно перевести в сферу. При этом преобразовании обобщенная окружность на плоскости перейдет в окружность или точку на сфере, а касающиеся обобщенные окружности на плоскости — в касающиеся окружности или точку и проходящую через нее окружность на сфере. Поэтому фактически нами рассматривается сфера и ее непустые пересечения с плоскостями. В дальнейшем мы будем считать, что бесконечно удаленная точка на плоскости присутствует, в частности, через эту точку проходят все прямые и сама она является обобщенной окружностью. Эту точку можно вернуть на видимую плоскость с помощью инверсии, которая меняет ее местами со своим центром. Строгие определения и некоторые теоремы см. в [5].

Теперь можно сформулировать основные результаты.

Теорема 1. *На плоскости даны 4 различные обобщенные окружности, которые не все касаются в одной точке. Тогда существует не более 6-и обобщенных окружностей, касающихся каждой из данных.*

Теорема 2. *На плоскости дано 5 различных обобщенных окружностей, которые не все касаются в одной точке. Тогда существует не более 4-х обобщенных окружностей, касающихся каждой из данных.*

Рис. 1: Примеры к теореме 1

Нетрудно найти примеры, когда количество окружностей, указанное в теоремах 1 и 2, действительно достигается. Соответствующие примеры для 4-х окружностей приведены на Рис. 1. В этих примерах исходные окружности имеют равный радиус, а их центры лежат в вершинах квадрата. Обоснование примеров практически очевидно и не нуждается в комментариях.

Из 6-и окружностей на Рис. 1, касающихся каждой из 4-х данных, выберем любые 5. Рассматривая эти 5 окружностей в качестве исходных, получаем пример к теореме 2.

Итак, найти какие-то примеры, подтверждающие точность теоремы 1, нетрудно. Однако оказывается, что *все* эти примеры допускают единое описание.

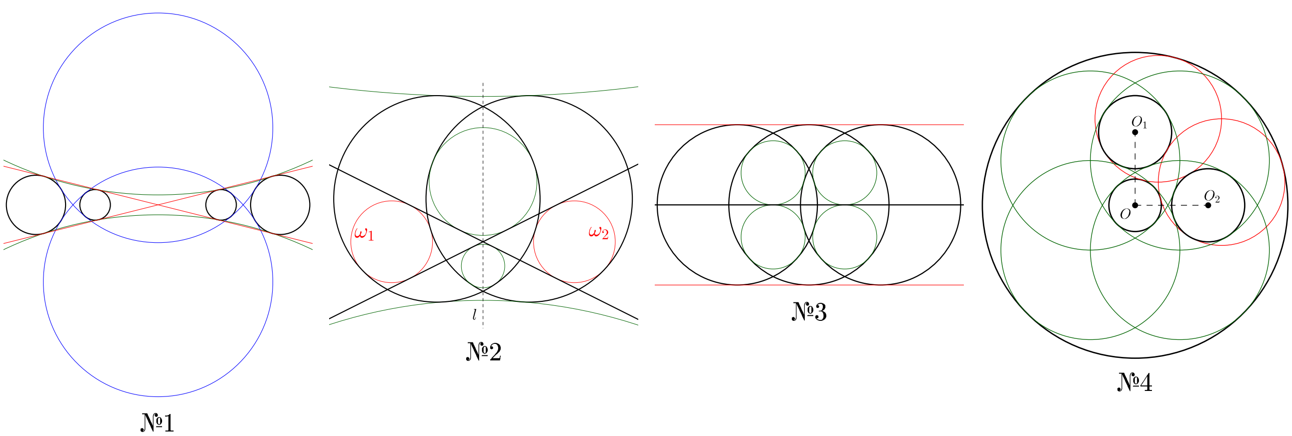


Рис. 2: К теореме 3

Теорема 3. *Пусть конфигурация 4-х обобщенных окружностей на плоскости такова, что существует ровно 6 обобщенных окружностей, касающихся каждой из данных. Тогда несколькими инверсиями ее можно свести к одной из следующих четырех (см. Рис. 2):*

1. *Исходные окружности — две непересекающиеся окружности, вписанные в угол, и две симметричные им относительно вершины этого угла.*

2. *Возьмем непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, симметричные относительно прямой l. Исходные обобщенные окружности — две окружности, касающиеся ω_1 и ω_2 и симметричные друг другу относительно l и две общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2*

3. *Исходные обобщенные окружности — прямая и 3 окружности радиуса 1 с центрами на этой прямой, причем расстояние между соседними центрами равно $2/\sqrt{5}$*

4. *Возьмем две концентрические окружности с центром O и отношением радиусов $3+2\sqrt{2}$ — это две исходные окружности. Рассмотрим 4 окружности, касающиеся обеих концентрических внутренним образом, причем так, чтобы центры этих 4-х окружностей лежали в вершинах квадрата. Две оставшиеся исходные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются этих 4-х, причем $\angle O_1OO_2 = 90^\circ$.*

Примеры на Рис. 1 соответствуют конфигурациям №1 и №2.

3 Обозначения, договоренности и используемые конструкции

Сначала договоримся о некоторых общих обозначениях. Данные в (обобщенной) задаче Аполлония объекты назовем *исходными*, а объект, касающийся всех данных, назовем *решением*. Назовем конфигурацию обобщенных окружностей *вырожденной*, если какие-то три из них касаются в одной точке. Вырожденная тройка объектов, очевидно, имеет бесконечно много решений.

Мы пользуемся следующими известными свойствами инверсии (о них см., например, в [5]):

1. Пару непересекающихся окружностей или непересекающиеся окружность и прямую можно перевести инверсией в концентрические окружности.

2. Пару пересекающихся в двух точках окружностей или пересекающиеся в двух точках окружность и прямую можно перевести инверсией в пересекающиеся прямые.

3. Пару касающихся окружностей или касающиеся окружность и прямую можно перевести инверсией в параллельные прямые.

4. Если точка лежит вне окружности, то существует инверсия с центром в этой точке, оставляющая окружность на месте.

5. Если точка лежит внутри окружности, то существует композиция инверсии и центральной симметрии с общим центром в этой точке, оставляющая окружность на месте.

Если два объекта из трех фиксированы, а третий α меняется, то соответствующие решения для всех трех объектов мы называем *решениями для* α (или *решениями, порожденными* α), а объект, касающийся только двух фиксированных, мы называем *допустимым*.

Рассмотрим тройку объектов, каждый из которых является окружностью или прямой. Для описания расположения такой тройки объектов на плоскости удобно использовать т. н. *метки Фитцджеральда*. Рассматриваемой тройке объектов сопоставляется набор букв, характеризующий их отношения: буква I используется для обозначения каждой пары пересекающихся объектов, буква T — для обозначения каждой пары касающихся объектов, а буква S — для обозначения того, что некоторая окружность или прямая разделяет два других объекта. Если все три объекта имеют общую точку, то запись заключается в квадратные скобки. Таким образом, например, метке $[TTT]$ соответствует вырожденная тройка объектов.

Известно (см., напр., [4]), что если три окружности или прямые попарно пересекаются, но не проходят через одну точку (это соответствует метке III), то возможно два случая: либо каждая обобщенная окружность разделяет точки пересечения двух других, либо нет. Обозначим эти случаи разными метками — III_1 и III_2 соответственно. Если три окружности попарно пересекаются и проходят через одну точку, то тоже возможно два случая: либо эти окружности имеют ровно одну общую точку, либо две. Эти случаи тоже обозначим разными метками $[III]_1$ и $[III]_2$ соответственно.

Также нам потребуются некоторые определения, связанные с тремя простейшими конструкциями из обобщенных окружностей. В каждой из них мы фиксируем два объекта и меняем третий.

1. Зафиксированы две пересекающиеся исходные прямые.

Будем называть 4 части, на которые две пересекающиеся прямые разбивают плоскость, *секторами*. Сектора пронумеруем по традиции обозначения квадрантов — римскими числами против часовой стрелки. Точку пересечения прямых обозначим через O.

Каждая окружность, касающаяся двух прямых, лежит в одном из секторов. Эти окружности — *допустимые.* Назовем *распределением* некоторого набора допустимых окружностей ненулевого радиуса упорядоченную четверку чисел x-y-z-t, где число на i-ом месте означает, сколько окружностей вписано в i-ый сектор. При необходимости мы указываем, относительно каких пересекающихся прямых записано распределение. Два распределения *изоморфны*, если они совпадают с точностью до переворотов и циклических сдвигов четверки x-y-z-t, т. е., например, разбиения 0-1-2-3 и 2-1-0-3 изоморфны. До первого упоминания о нумерации секторов распределения рассматриваются с точностью до изоморфизма.

Также решениями еще могут являться точки O и ∞. Такие решения мы назвааем *дополнительными.*

Теперь добавим еще одну окружность или прямую α и рассмотрим распределение решений для α.

Лемма 3.1. *Даны две пересекающиеся прямые, а также окружность или прямая α, отличная от данных. Тогда, в зависимости от положения α на плоскости, вся тройка имеет одну из меток, указанных в Табл. 1. Метка однозначно определяет распределение решений для α и количество дополнительных решений (см. Табл. 1 и Рис. 3).*

Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α
I	III_1	2-2-2-2	$\varnothing$	8
II	III_2	4-2-0-2	$\varnothing$	8
III	II	2-2-0-0	$\varnothing$	4
IV	I	4-0-0-0	$\varnothing$	4
V	$[III]_1$	2-1-0-1	O или ∞	5
VI	$[III]_2$	0-0-0-0	O и ∞	2
VII	IIT	3-1-0-2	$\varnothing$	6
VIII	IT	3-1-0-0	$\varnothing$	4
IX	ITT	2-1-0-1	$\varnothing$	4
X	$[IIT]$	1-0-0-1	O или ∞	3

Таблица 1: I-типы

Примечание. Занумеруем метки в Табл. 1 римскими цифрами. Мы говорим, что окружность α имеет *I-тип* N, если α вместе с 2-я зафиксированными прямыми имеет метку под номером N.

Примечание. Количество решений указано без учета кратности.

Примечание. Заметим, что окружность II типа всегда пересекает обе стороны некоторого сектора.

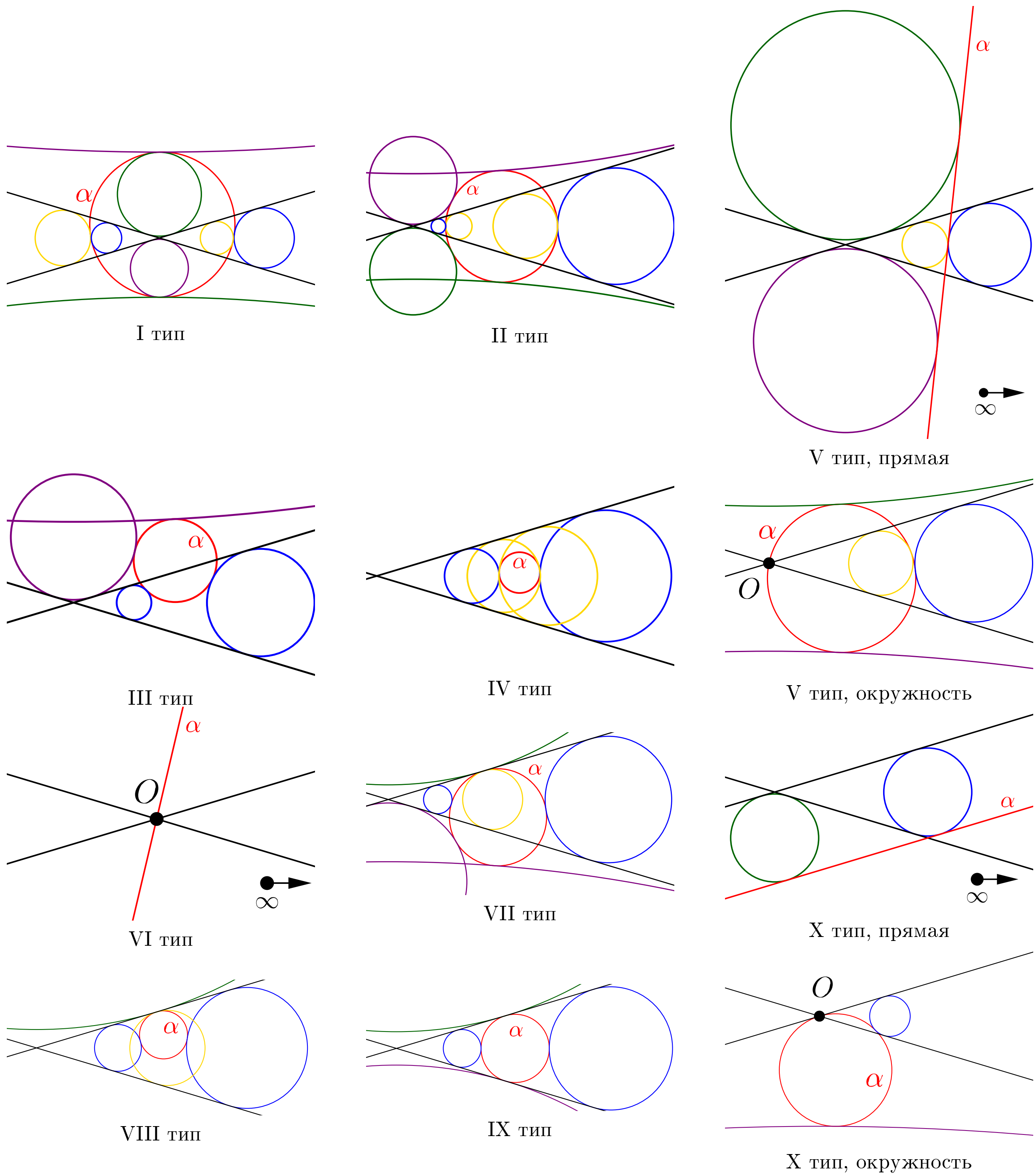
Доказательство леммы 3.1 осуществляется одинаковым образом для всех типов посредством непрерывного увеличения допустимой окружности в одном из секторов до момента касания с α. Более подробное рассуждение см. в [1].

2. Зафиксированы две концентрические окружности.

Через ω обозначим окружность с меньшим радиусом, а через Ω — с большим. Общий центр ω и Ω обозначим через O. Все окружности, касающиеся ω и Ω, разбиваются на два типа, которые мы обозначим A и B: окружности *типа A* касаются ω внешним образом, а *типа B* — внутренним. Их тоже логично назвать *допустимыми.* Прямую, соединяющую O с центром окружности α, мы называем *диаметром* (а луч — *радиусом*), на котором лежит α. *Противоположными* называются окружности, лежащие на одном диаметре, но по разные стороны от O.

Теперь снова добавим еще одну окружность α, но потребуем, чтобы она не имела общих точек с ω и Ω. Найдем количество допустимых окружностей, касающихся α.

Лемма 3.2. *Даны две концентрические окружности и окружность или прямая α, не имеющая общих точек с данными. Тогда полученная тройка либо не имеет решений, либо имеет 8 решений (как на Рис. 4).*



I тип
II тип
V тип, прямая
III тип
IV тип
V тип, окружность
VI тип
VII тип
X тип, прямая
VIII тип
IX тип
X тип, окружность
α
O
∞

Рис. 3: I-типы

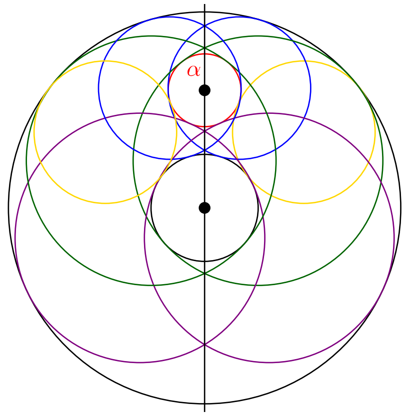


Рис. 4: К лемме 3.2

Доказательство леммы 3.2. Возможны следующие случаи:

1. α лежит внутри ω. Тогда ω разделяет α и Ω.
2. α лежит снаружи Ω. Тогда Ω разделяет α и ω.
3. α лежит внутри Ω, и ω лежит внутри α. Тогда α разделяет ω и Ω.
4. α лежит внутри Ω, но ω не лежит внутри α, и α не лежит внутри ω.

Случаи 1—3 соответствуют метке S, и тогда решений нет. Случай 4 соответствует пустой метке ($\varnothing$), и тогда есть 8 решений, причем 4 из них имеют тип A, и еще 4 — тип B. Доказательство осуществляется посредством вращения потенциального решения до момента касания с α. □

Обратим внимание, что полученные 8 решений разбиваются на пары симметричных относительно радиуса, на котором лежит α. Следующее наблюдение оказывается весьма полезным в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Среди любых 5 решений для α можно выбрать пару пересекающихся, а среди любых 6 решений для α можно выбрать пару пересекающихся и симметричных относительно радиуса, на котором лежит α.*

Доказательство леммы 3.3. Заметим, что любые две окружности типа B пересекаются, и только в одной паре симметричных решений окружности могут не пересекаться — это пара решений типа A, которые касаются α внешним образом. Отсюда мгновенно следуют оба утверждения леммы. □

3. Зафиксированы две параллельные прямые.

Будем подразумевать направление фиксированных прямых *горизонтальным*, а перпендикулярное — *вертикальным*. *Допустимыми* являются окружности равного радиуса, касающиеся фиксированных прямых, а также все горизонтальные прямые и точка ∞. *Распределением* здесь будем называть упорядоченную пару чисел $x{+}y$, где x обозначает количество допустимых окружностей, а y — количество допустимых прямых. Решением может быть также точка ∞ — в этом случае она называется *дополнительным решением*.

Лемма 3.4. *Даны две параллельные прямые, а также окружность или прямая α, отличная от данных. Тогда, в зависимости от положения α на плоскости, вся тройка имеет одну из меток, указанных в Табл. 2. Кроме того, метка однозначно определяет распределение решений для α и количество дополнительных решений (см. Табл. 2 и Рис. 5).*

Примечание. Занумеровав метки римскими цифрами, определим *T-типы* аналогично I-типам. Обычно из контекста ясно, имеется ввиду I-тип или T-тип, и мы это не указываем. Как и в лемме 3.1, количество решений указано без учета кратности.

Доказательство леммы 3.4 осуществляется одинаковым образом для всех типов посредством непрерывного перемещения допустимой окружности между параллельными прямыми до момента касания с α.

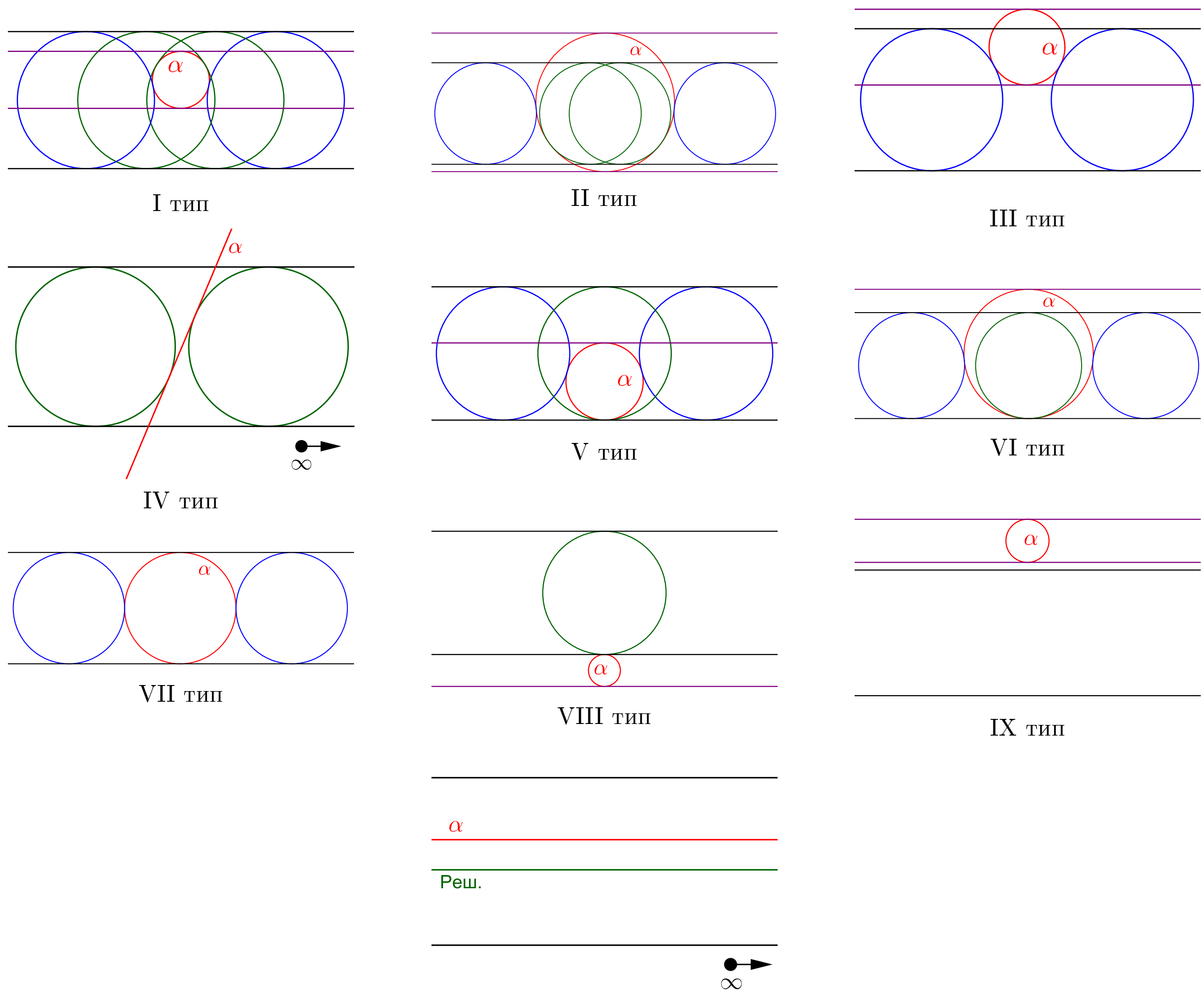

α
I тип
α
II тип
α
III тип
α
∞
IV тип
α
V тип
α
VI тип
α
VII тип
α
VIII тип
α
IX тип
α
Реш.
∞
X тип

Рис. 5: Т-типы

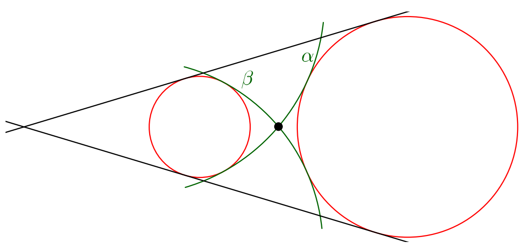
Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α
I	T	4+2	$\varnothing$	6
II	IIT	4+2	$\varnothing$	6
III	IT	2+2	$\varnothing$	4
IV	$[IIT]$	2+0	∞	3
V	TT	3+1	$\varnothing$	4
VI	ITT	3+1	$\varnothing$	4
VII	TTT	2+0	$\varnothing$	2
VIII	STT	1+1	$\varnothing$	2
IX	ST	0+2	$\varnothing$	2
X	$[TTT]$	0+∞	∞	∞

Таблица 2: Т-типы

4 Леммы о пересечениях

В этом разделе мы докажем несколько очень похожих утверждений, которые будут полезны при доказательстве теорем 1 и 3 и особенно теоремы 2. В следующих четырех леммах предполагается зафиксированной пара пересекающихся прямых.

Лемма 4.1 (1-я лемма о пересечениях). *Если две окружности типа I имеют два общих решения в одном секторе, то они имеют общую точку внутри этого сектора.*



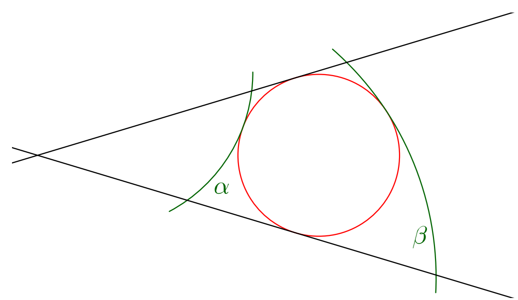


Рис. 6: К лемме 4.1

Доказательство леммы 4.1. Заметим, что если α и β не пересекаются в каком-то секторе, то они делят его на три области, из которых, возможно, лишь в одну можно вписать требуемую окружность-решение (Рис. 6 справа). Так как в нее, очевидно, можно вписать не более одной окружности, утверждение доказано. $\square$

Лемма 4.2 (2-я лемма о пересечениях). *Пусть для окружностей α, β и γ, имеющих тип I, есть общее решение в некотором секторе. Тогда среди них какие-то две имеют общую точку внутри этого сектора.*

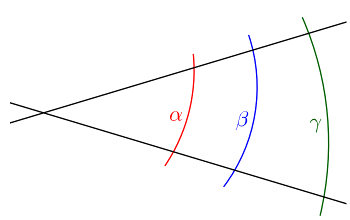
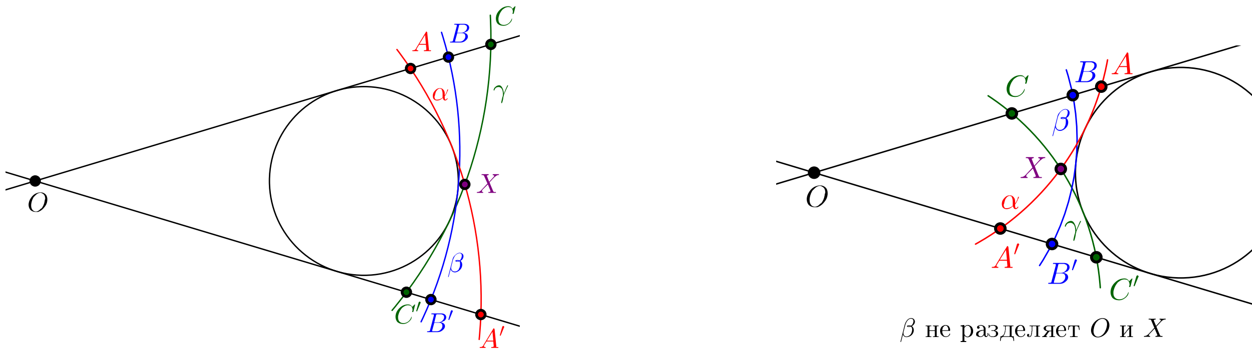


Рис. 7: К лемме 4.2

Доказательство леммы 4.2. Предположим противное. Тогда дуги окружностей α, β и γ делят сектор на четыре части, каждая из которых граничит не более чем с двумя из этих окружностей (см. Рис. 7). Потенциальное решение должно быть вписано в одну из этих частей, что, в таком случае, невозможно. $\square$

Лемма 4.3 (3-я лемма о пересечениях). *Пусть для окружностей α, β и γ, имеющих тип I, есть два общих решения в некотором секторе. Тогда среди них какие-то две имеют две общие точки внутри этого сектора.*



β разделяет O и X

β не разделяет O и X

Рис. 8: К лемме 4.3

Доказательство леммы 4.3. Предположим противное. Пусть дуги окружностей α, β и γ пересекают одну из сторон данного сектора в точках A, B и C, а вторую — в точках A', B' и C' соответственно. Пусть для определенности B лежит на отрезке AC.

По лемме 4.1 дуги окружностей α и β имеют общую точку внутри рассматриваемого сектора причем, согласно нашему предположению, ровно одну. Но тогда порядок троек точек O, A, B и O, A', B' должен отличаться, т. е. если A лежит на отрезке OB, то B' лежит на отрезке OA', и наоборот: если B лежит на отрезке OA, то A' лежит на отрезке OB'. То же верно и для двух других пар дуг окружностей (α и γ, β и γ). Отсюда ясно, что B' лежит на $A'C'$.

Пусть теперь X — точка пересечения дуг α и γ. Возможно два случая, в зависимости от того, разделяет ли β точки O и X (см. Рис. 8). Нетрудно убедиться, что в обоих случаях α, β и γ делят сектор на 7 частей, из которых только одна граничит со сторонами сектора и всеми тремя данными окружностями — только в эту часть может быть вписана искомая окружность. Получаем противоречие с условием леммы. $\square$

Лемма 4.4 (4-я лемма о пересечениях). *Даны окружность α типа I и окружность β типа II, пересекающая обе стороны II сектора, причем α и β имеют в I секторе два общих решения. Тогда они имеют общую точку в I секторе.*

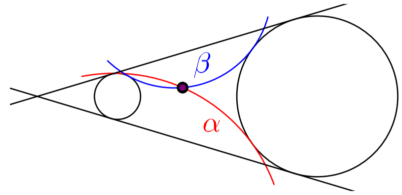


Рис. 9: К лемме 4.4

Доказательство леммы 4.4. Разделим каждое общее решение для α и β в I секторе на две дуги точками касания с прямыми. Из полученных 4-х дуг рассмотрим 2 такие, которые имеют общую точку с α. Заметим, что α разделяет эти дуги, а β также имеет с каждой из них общую точку, поскольку β пересекает обе стороны II сектора (см. Рис. 9). Следовательно, дуга β, лежащая в I секторе, должна пересекать дугу α в I секторе в силу непрерывности окружности. $\square$

5 Геометрия окружностей

Для полного понимая этого раздела потребуется знание основ линейной алгебры. Однако для понимания формулировок необходимых нам результатов эти знания вовсе не обязательны. Читатель может ознакомиться только с формулировками (без доказательств) в разд. 5.2.

5.1 Основные понятия геометрии окружностей

Рассмотрим 5-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^5$, снабженное симметричной билинейной формой:

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_4 y_4$$

В этом пространстве *квадрика Ли* определяется условием:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \colon (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$$

Заметим, что $\mathbf{x} \in \Omega \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} \rangle \subset \Omega$.

Каждой точке плоскости, а также каждой ориентированной окружности или прямой можно поставить в соответствие одномерное подпространство (прямую) $\langle \mathbf{x} \rangle \subset \Omega$, согласно следующим правилам:

1. Окружности с центром (p_1, p_2) и радиусом r соответствует $\langle (v, p_1, p_2, 1, \pm r) \rangle$. Здесь знак перед r зависит от ориентации окружности (см. подробности в [3]), а v подбирается так, чтобы полученное подпространство содержалось в Ω.

2. Прямой с нормальным вектором $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, где $\|\mathbf{p}\| = 1$, проходящей через точку $\mathbf{q}$ соответствует $\langle (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_1, p_2, 0, 1) \rangle$. Выбор одной из двух возможностей для $\mathbf{p}$ зависит от ориентации прямой (см. [3]).

3. Точке с координатами (p_1, p_2) соответствует $\langle (v, p_1, p_2, 1, 0) \rangle$, где v снова подбирается так, чтобы полученное подпространство содержалось в Ω. Точке ∞ соответствует $\langle (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$.

Это соответствие взаимно-однозначно.

Такое представление замечательно тем, что, как нетрудно проверить (см., например, [2]), объекты X и Y ориентированно касаются тогда и только тогда, когда ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, выбранные произвольно из соответствующих X и Y одномерных подпространств, удовлетворяют соотношению $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Это позволяет переформулировать задачу Аполлония на линейно-алгебраический язык.

Подробнее о геометрии окружностей см. [2] и [3].

5.2 Применение к задаче Аполлония

Пусть на плоскости дано несколько окружностей и окружность, касающаяся всех данных (решение). Сопоставим каждой данной исходной окружности знак «+», если она касается данного решения внешним образом, и знак «−», если внутренним. Мы говорим, что решение *соответствует* (*подходит*) данной *расстановке* (*набору, комбинации*) знаков.

Теперь поступим наоборот: сначала расставим знаки, а затем попробуем найти решение, которому этот набор знаков соответствовал бы. Сколько существует таких решений? Оказывается, если на конфигурацию данных окружностей наложены некоторые естественные ограничения, то таких решений не больше двух. Они поэтому называются *парными.*

Сперва нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть тройка окружностей G, соответствующая прямым $\langle \mathbf{x} \rangle$, $\langle \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{z} \rangle$ невырождена (ориентация здесь не учитывается). Тогда векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp} \not\subset \Omega$.*

Доказательство леммы 5.1. Предположим противное, т. е. что $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ лежат в одной плоскости π. Тогда π имеет с квадрикой Ω три общие прямые. Но это возможно лишь если $\pi \subset \Omega$. Пусть $\mathbf{t}$ — произвольный вектор из π. Тогда $\mathbf{x} - \mathbf{t} \in \pi$. Имеем $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ и $(\mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{t}) = 0$, откуда $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2}((\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{t}, \mathbf{t}) - (\mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{t})) = 0$. Аналогично $(\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = 0$, т. е. $\langle \mathbf{t} \rangle$ соответствует некоторому объекту, который касается каждой окружности из G, и тройка G имеет бесконечно много решений. Но из лемм 3.1, 3.2, 3.4 следует, что бесконечным числом решений обладают лишь вырожденные тройки — противоречие.

Далее, если $\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp} \subset \Omega$, то любой вектор из θ соответствует решению. Мы получаем, что $\dim \theta = 2 > 1$, поэтому тройка G снова имеет бесконечно много решений, т. е. вырождена. □

Теперь можно сформулировать самый важный для нас факт.

Лемма 5.2. *Дано множество G, состоящее из окружностей на плоскости, причем $|G| \geq 3$ и G — невырожденное. Каждой окружности из G сопоставлен знак. Тогда G имеет не более 2-х решений, подходящих для данной расстановки знаков.*

Доказательство леммы 5.2. Выберем из G три произвольные окружности и ориентируем их согласно их знакам. Сопоставим им одномерные подпространства $\langle \mathbf{x} \rangle$, $\langle \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{z} \rangle$. Каждое подходящее решение соответствует окружности, ориентированно касающейся каждой окружности из G. Поэтому надо доказать, что существует не более двух векторов $\mathbf{t}$ таких что $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$.

По лемме 5.1 векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы и $\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp} \not\subset \Omega$. Но $\dim \theta = 2$. Значит, θ пересекает Ω не более, чем по двум прямым, т. е. существует не более 2-х решений, что и требовалось. □

Следующая лемма достаточно естественна, однако она оказывается весьма полезной во многих ситуациях.

Лемма 5.3. *Пусть в условиях леммы 5.2 центры окружностей из G лежат на одной прямой. Тогда парные решения симметричны относительно этой прямой.*

Доказательство леммы 5.3. Рассмотрим такую систему координат, в которой линия центров G является осью абсцисс. Снова выберем из G три окружности и сопоставим им вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Обозначим $\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp}$. По лемме 5.1 имеем $\dim \theta = 2$ и $\theta \not\subset \Omega$.

Рассмотрим отображение $f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, определенное правилом:

$$f \colon (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_0, x_1, -x_2, x_3, x_4)$$

Отображение f, очевидно, линейно, и при этом оно сохраняет значение билинейной формы. Кроме того, оно отображает каждый из векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ в себя, поэтому в силу линейности f и каждая точка из $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ отображается в себя. Поэтому и $f(\theta) = \theta$.

Если плоскость θ пересекает Ω менее, чем по двум прямым, то доказывать нечего. В противном случае θ пересекает Ω по двум прямым, причем вектора из этих прямых порождают θ. Это значит, что если каждая из этих прямых переходит в себя, то и каждая точка θ переходит в себя (в силу линейности f), т. е. f — тождественное преобразование — противоречие. Поэтому эти прямые переходят друг в друга под действием f. Это как раз и означает, что соответствующие им объекты симметричны относительно оси абсцисс, что и требовалось. □

6 Доказательство теоремы 1

Доказательство. Предположим противное условию теоремы, т. е. что нашлись 4 объекта (не все из которых касаются в одной точке) с 7-ю решениями.

Лемма 6.1. *Пусть среди 4-х или более исходных объектов есть точка, а количество решений больше 4-х. Тогда все исходные объекты касаются в одной точке.*

Доказательство леммы 6.1. Известно (см., например, [1, стр. 100]), что если в тройке объектов есть точка, то количество решений для этой тройки не больше 4-х, за исключением случая вырожденной тройки. Поэтому в нашем случае любая тройка объектов, содержащая точку, вырождена. Ясно, что тогда все объекты касаются в этой точке, что исключено условием. □

Из леммы 6.1 получаем, что все исходные объекты — окружности или прямые. Докажем, что среди них нет касающихся. Предположим противное и рассмотрим любую тройку исходных объектов, содержащую касающиеся. По лемме 3.4 такая тройка либо имеет не более 6-и решений, либо она вырождена. Но у нас по предположению имеется хотя бы 7 решений, поэтому любая тройка исходных объектов, содержащая касающиеся, вырождена. Тогда очевидно, что снова все объекты касаются в одной точке, что исключено формулировкой теоремы.

Таким образом, среди исходных объектов нет точек и пар касающихся. Далее рассмотрим два случая.

Первый случай: среди исходных окружностей или прямых какие-то две пересекаются. Переведем инверсией любые две пересекающиеся обобщенные окружности в пересекающиеся прямые. Для краткости здесь и далее образы исходных объектов при одной или нескольких инверсиях называются просто исходными объектами, а образы решений — просто решениями.

Кроме двух пересекающихся прямых есть еще две исходные обобщенные окружности. Обозначим их через α и β.

По лемме 3.1. для объектов не I или II типа уже по отдельности существует не больше 5-и решений, поэтому α и β могут быть только объектами этих типов. Если они имеют разные типы, то их распределения равны 2-2-2-2 и 0-2-4-2 и они пересекаются не больше чем по 6-и окружностям т. е. всего есть не более 6-и решений. Поэтому α и β обязательно имеют одинаковые типы.

Пусть α и β имеют тип I. Тогда 7 общих решений для α и β, очевидно, имеют распределение 2-2-2-1. Значит, согласно лемме 4.1 хотя бы в 3-х секторах α и β должны пересекаться, что приводит к противоречию.

Пусть α и β имеют тип II. Тогда, чтобы решений было хотя бы 7, необходимо, чтобы эти окружности пересекали обе стороны одного и того же сектора, иначе уже распределения решений для них (4-2-0-2 и 2-4-2-0, либо 4-2-0-2 и 0-2-4-2 в одинаковой нумерации секторов) пересекаются не более, чем по 4-м окружностям. С этого сектора и начнем нумерацию. Тогда в I секторе не более 4-х решений, а значит во II и IV в сумме не меньше 3-х. Завершает доказательство первого случая следующая лемма.

Лемма 6.2. *Для двух окружностей α и β, имеющих II тип и пересекающих обе стороны I сектора, есть не более двух общих решений в секторах II и IV.*

Доказательство леммы 6.2. Предположим противное. Заметим, что α и β касаются своих решений в секторах II и IV внешним образом, т. е. соответствуют комбинации «$+ + +$». Центры этих решений лежат на одной прямой — биссектрисе секторов II и IV. Ясно, что α и β лежат по одну сторону от этой прямой, в частности, они не могут быть симметричны относительно нее. Противоречие с леммой 5.3. □

Второй случай: никакие две окружности или прямые из исходных четырех не пересекаются. Переведем инверсией любые два из данных объектов в концентрические окружности. Образы двух оставшихся объектов снова обозначим через α и β.

По лемме 3.2, для α и β отдельно существует 4 решения типа A и столько же типа B, причем каждое из этих множеств симметрично относительно радиуса, на котором расположена соответствующая окружность α или β. Так как у нас, согласно предположению, имеется не меньше 7-и решений, то хотя бы 4 из них одного типа. Далее нам потребуется несколько лемм.

Лемма 6.3. *Пусть окружности α и β порождают 4 общих решения одного типа. Тогда либо α и β лежат на одном диаметре, либо α и β лежат на перпендикулярных диаметрах. В последнем случае общие решения обязательно имеют тип B, а их центры образуют прямоугольник (см. Рис. 10).*

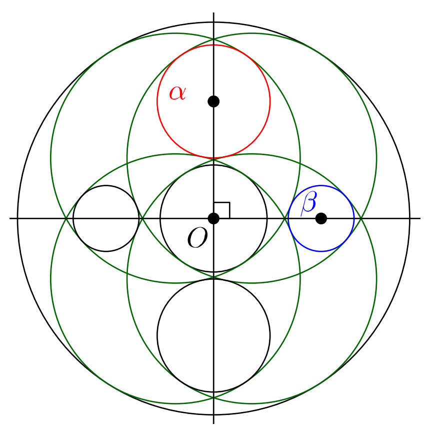


Рис. 10: К лемме 6.3

Доказательство леммы 6.3. Пусть α и β не лежат на одном диаметре (иначе доказывать нечего). Обозначим множество 4-х общих решений одного типа для α и β через X. Поскольку окружности из X являются решениями и для α, и для β, то X симметрично относительно радиусов α и β. Однако по нашему предположению, угол между диаметрами, на которых лежат α и β ненулевой. Поэтому множество X переходит в себя при некотором повороте на $\varphi > 0$ относительно O. Можно считать $\varphi \leq 180°$.

Докажем, что $\varphi = 90°$ или $\varphi = 180°$. Рассмотрим произвольную окружность Γ из X. При поворотах на 0, φ, 2φ, и т. д. она переходит в окружность из X. Но в X ровно 4 окружности, поэтому Γ может иметь от 2 до 4 образов при таких поворотах (Γ не может перейти в себя, так как $0 < \varphi \leq 180°$). Эти случаи соответствуют поворотам на 180°, 120° и 90° соответственно. Однако если образов 3, то в X остается еще одна окружность, не являющаяся образом Γ. У нее тоже 3 образа, которые не совпадают с образами Γ. Получается, что в X хотя бы 6 окружностей, а не 4 — противоречие. Остаются варианты

$180°$ и $90°$, которые реализуются, только если центры окружностей из X образуют прямоугольник или квадрат соответственно.

Чтобы теперь доказать, что в X не могут быть окружности типа А, нам понадобится следующая небольшая и достаточно очевидная лемма.

Лемма 6.4. *Если для α и β есть два общих противоположных решения P и Q типа А, то α и β лежат на одном диаметре.*

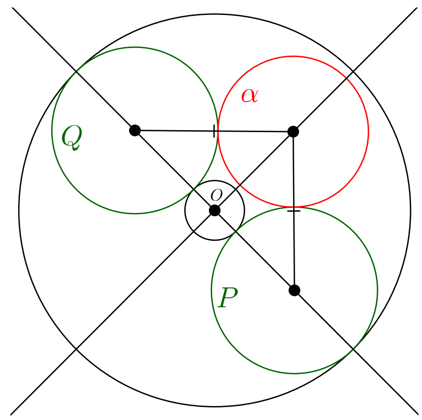


Рис. 11: К лемме 6.4

Доказательство леммы 6.4. Заметим, что P и Q не пересекаются, т. к. они центрально-симметричны относительно точки O, которой не содержат внутри себя. Так как радиус окружности α меньше радиуса окружности P (в обычном смысле), то если α касается P внутренним образом, то α лежит внутри P. Но т. к. P и Q не пересекаются, то α тогда не может касаться Q. Значит, α и β касаются P и Q внешним образом (см. Рис. 11). Но радиусы P и Q равны, поэтому ГМТ центров окружностей, касающихся внешним образом P и Q, является серединным перпендикуляром отрезка между центрами P и Q, который, очевидно, проходит через O, что и требовалось. □

Продолжим доказательство леммы 6.3. Из леммы 6.4 ясно, что в X не могут быть окружности типа А, т. к. окружности из X делятся на две пары противоположных, поэтому α и β должны лежать одновременно на двух диаметрах, что невозможно. Таким образом, в X только окружности типа В.

Так как центры окружностей из X образуют прямоугольник, то кроме концентрических существуют еще 4 окружности, которые касаются всех окружностей из X — они вписаны в криволинейные симметричные четырехугольники, образованные окружностями из X (см. Рис. 10). Больше окружностей, касающихся всех окружностей из X быть не может по доказанному выше первому случаю основной теоремы. Действительно, в X четыре попарно пересекающихся окружности, и их уже касаются 6 других — 2 концентрические и 4 вписанные в криволинейные четырехугольники. Центры этих 4-х «новых» окружностей лежат на двух перпендикулярных диаметрах; α и β должны быть двумя из этих четырех окружностей, т. е. они должны лежать на двух перпендикулярных диаметрах — лемма 6.3 доказана. □

Лемма 6.5. *Пусть окружности α и β порождают 4 общих решения типа В и лежат на перпендикулярных диаметрах. Тогда они не могут порождать еще 3 общих решения типа А.*

Доказательство леммы 6.5. Пусть это не так. Обозначим общие решения типа А через P, Q, R. Докажем, что среди них есть пара противоположных. Так как все они касаются α, а всего среди решений для α четыре типа А, причем они разбиваются на две пары симметричных, то среди P, Q, R две симметричны относительно радиуса, на котором лежит α. Пусть это P и Q. Рассмотрим теперь пару окружностей, аналогично симметричную относительно радиуса, на котором лежит β. Если это снова P и Q, то они переходят друг в друга при двух симметриях, угол между осями которых составляет $90°$, а тогда P и Q совпадают, что невозможно. Если же это Q и R (или P и R), то тогда, так как угол между радиусами, на которых лежат α и β равен $90°$, то P и R (соответственно, Q и R) противоположны — отражение относительно двух перпендикулярных осей является центральной симметрией. Таким образом, среди P, Q и R есть пара противоположных. Следовательно, α и β имеют два противоположных решения типа А, из чего с помощью леммы 6.4 получаем, что они лежат на одном диаметре — противоречие. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Так как α и β порождают 4 общих решения одного типа, то по лемме 6.3 они лежат либо на одном диаметре, либо на перпендикулярных диаметрах. Но во втором случае α и β порождают еще 3 общих решения типа A, что невозможно по лемме 6.5. Таким образом, α и β лежат на одном диаметре, в частности, центры всех исходных окружностей лежат на одной прямой.

Окружности α и β порождают 7 общих решений, поэтому по лемме 3.3 из них можно выбрать пару пересекающихся симметричных решений. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 6.6. *Пусть центры всех 4-х исходных окружностей лежат на одной прямой, а среди решений есть два пересекающихся и симметричных относительно этой прямой. Тогда после инверсии в точке пересечения этих решений исходные окружности образуют одно из распределений 4-0-0-0, 3-0-1-0 или 2-0-2-0 относительно образов этих решений. Количество всех решений в этих случаях не превосходит 4, 2 и 6 соответственно.*

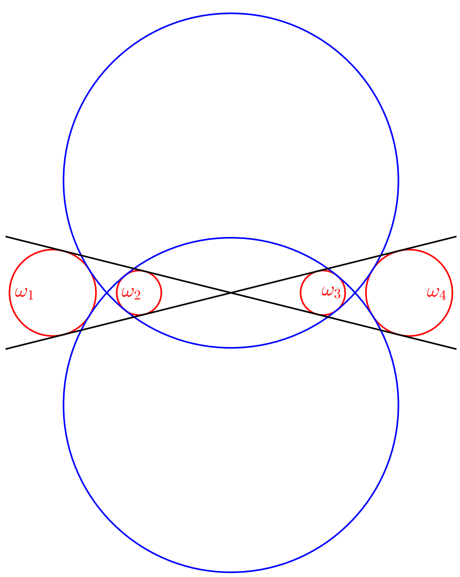
Доказательство леммы 6.6. Центр инверсии лежит на линии центров исходных окружностей (так как точка пересечения двух симметричных окружностей лежит на их оси симметрии). Поэтому центры всех 4-х исходных окружностей до инверсии лежали на одной прямой, проходящей через центр инверсии. Значит и после инверсии их центры лежат на одной прямой, а тогда все исходные окружности и должны лежать в двух противоположных секторах — первая часть леммы, тем самым, доказана.

С этого момента мы будем рассматривать решения в качестве исходных объектов (назовем их *новыми исходными объектами*), а четверку исходных объектов, наоборот, в качестве решений (назовем их *новыми решениями*). Обозначим последние через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в том порядке, в котором они касаются любой из прямых.

Рассмотрим по отдельности все возможные распределения 4-х новых решений. В первом случае (распределение 4-0-0-0) по лемме 3.1 оставшиеся новые исходные объекты должны быть II или IV типа. Но среди 4-х решений для любой окружности IV типа заведомо есть пересекающиеся — те, что содержат окружность α на Рис. 3 внутри себя. Значит, все оставшиеся новые исходные объекты имеют II тип. Они касаются ω_1 и ω_4 внешним образом, а ω_2 и ω_3 — внутренним. По лемме 5.2, где в качестве G мы берем все 4 новых решения, имеем, что таких новых исходных объектов не более 2-х.

Для второго случая (3-0-1-0) вообще не существует подходящего нового исходного объекта никакого типа, в чем нетрудно убедиться с помощью Табл. 1.

В третьем же случае (2-0-2-0) оставшиеся новые исходные объекты могут быть I или II типа.



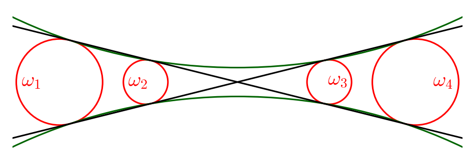


Рис. 12: Распределение новых решений 2-0-2-0

Окружности II типа должны касаться каждого из 4-х новых решений внешним образом. Применим для них лемму 5.2, взяв в качестве G четверку новых решений с комбинацией знаков «$++++$». Получаем, что есть не более двух окружностей II типа (Рис. 12 справа).

Окружности I типа касаются ω_2 и ω_3 внутренним образом, а ω_1 и ω_4 — внешним. Применим еще раз лемму 5.2, снова взяв в качестве G четверку новых решений с комбинацией знаков «$+--+$». Получаем, что есть не более двух окружностей I типа (Рис. 12 слева).

Таким образом, общее количество новых исходных объектов I и II типов в этом случае не больше 4-х, т. е. количество решений исходной задачи не больше 6-и и доказательство леммы 6.6, а с ней и всей теоремы 1 завершено. □

7 Доказательство теоремы 2

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 предположим противное, т. е., что нашлась пятерка объектов (не все из которых касаются в одной точке) с 5-ю решениями. По лемме 6.1 среди исходных объектов нет точек. Заметим, что количество решений равно количеству исходных объектов, а также что все решения не могут касаться в одной точке (иначе все исходные объекты касаются в этой же точке). Поэтому решения можно рассматривать в качестве исходных объектов (и наоборот), и среди решений тоже нет точек.

Первый случай: ни среди исходных объектов, ни среди решений нет касающихся. Заметим, что либо среди исходных объектов, либо среди решений есть пересекающиеся. Действительно, в противном случае переведем инверсией любые две исходные обобщенные окружности в концентрические и воспользуемся леммой 3.3.

Полученная пара пересекающихся объектов принадлежит некоторой пятерке, которую мы и будем считать исходной. Переведем инверсией эти пересекающиеся объекты в прямые. Оставшиеся исходные объекты обозначим α, β и γ. Из леммы 3.1 получаем, что каждый из них должен иметь I, II или V тип. Но если какой-то объект имеет V тип, то среди решений должна быть точка, что невозможно. Значит, каждый из объектов α, β и γ имеет I или II тип. Соответственно, возможно 4 случая. Прежде, чем разбирать их, заметим, что две окружности II типа могут иметь больше 4-х общих решений только тогда, когда пересекают обе стороны одного и того же сектора. С этого сектора и начнем нумерацию.

1° Все окружности $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ имеют тип I. Так как окружности α, β и γ имеют I тип, то в каждом секторе есть не более 2-х решений, а распределение всех 5-и решений изоморфно 2-2-1-0, 2-1-2-0 или 1-1-1-2. Рассмотрим точки пересечения α и β, β и γ, α и γ и обозначим их множество через C. Для каждой пары окружностей таких точек не больше 2-х, поэтому всего их не больше 6-и.

Согласно лемме 4.2 в секторах с одним решением есть хотя бы 1 точка из C. Далее, в секторе с 2-я решениями каждая пара окружностей (α и β, β и γ, α и γ) имеет общую точку по лемме 4.1, а какая-то пара имеет в этом секторе даже две общие точки по лемме 4.3. Поэтому в таком секторе есть не меньше 4-х точек из C (все 3 окружности α, β и γ не могут иметь общую точку, поскольку тогда они имеют метку $[III]_1$ или $[III]_2$, и по лемме 3.1 общее количество решений, которые не являются точками, не больше 4-х).

Таким образом, в случае распределений 2-2-1-0 и 2-1-2-0 имеем $|C| \geq 2 \cdot 4 + 1 = 9$, а в случае распределения 1-1-1-2 имеем $|C| \geq 3 + 4 = 7$. Но $|C| \leq 6$ — противоречие.

2° Все окружности $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ имеют тип II. Рассмотрим случаи в зависимости от количества решений в I секторе. Обозначим эти решения через ω_i где $i = 1, 2, 3, 4$ в том порядке, в котором они касаются любой из прямых.

2.1° В I секторе 4 решения. Тогда α, β и γ касаются ω_1, ω_4 внешним образом, а ω_2, ω_3 — внутренним. Из леммы 5.2 для $G = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и комбинации «$+--+$» получаем противоречие.

2.2° В I секторе 3 решения. Рассмотрим окружность α. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются тремя из 4-х решений для α в I секторе (см. Рис. 3). Простой перебор показывает, что если взять любые 3 решения из этих 4-х, то среднее из них касается α внутренним образом. Поэтому α, β и γ касаются ω_2 внутренним образом. Однако всего решений 5, поэтому есть еще 2 решения в секторах II и IV, которые касаются α, β и γ внешним образом. Обозначим их через σ_1 и σ_2. Применим лемму 5.2 для $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \omega_2\}$ и комбинации «$++-$», получая противоречие.

2.3° В I секторе не более 2-х решений. Тогда в секторах II и IV в сумме хотя бы 3 решения, что противоречит лемме 6.2.

3° Две окружности II типа (например, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$) и одна окружность I типа ($\boldsymbol{\gamma}$). Тогда за счет окружности I типа в I секторе не более 2-х решений, но тогда во II и IV секторах хотя бы 3 решения, что противоречит лемме 6.2.

4° Две окружности I типа ($\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$) и одна окружность II типа ($\boldsymbol{\gamma}$). В этом случае без ограничения общности возможны распределения решений 1-2-0-2 и 2-2-0-1. Разберем их отдельно.

4.1° Распределение 1-2-0-2 (см. Рис. 13). Так как в секторах II и IV по 2 решения, то из леммы 4.4 получаем (после перенумерации секторов), что все точки пересечения γ с α и β находятся в этих секторах. Далее, по лемме 4.1 окружности α и β также должны иметь общие точки в этих секторах. Таким образом, α, β и γ попарно не имеют общих точек в секторе I. В таком случае, они разбивают его на 5 частей, в каждую из которых можно вписать окружность, касающуюся лишь не более двух из α, β и γ — противоречие.

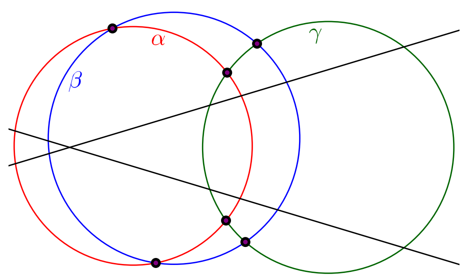


Рис. 13: К доказательству случая 4.1°

4.2° Распределение 2-2-0-1 (см. Рис. 14). Обозначим решения в I секторе через ω_1 и ω_2, а решения во II секторе через ω_3 и ω_4, так, чтобы решение с меньшим радиусом имело меньший индекс. Сделаем инверсию в точке пересечения α и β (она существует по лемме 4.1). Заметим, что ω_1 и ω_3 лежат внутри α и β, а ω_2 и ω_4 — вне. Но 4 области, на которые α и β делят плоскость, при инверсии перейдут в сектора соответствующих прямых. Поэтому распределение образов ω_1,ω_2,ω_3,ω_4 относительно прямых — образов α и β равно 2-0-2-0, и распределение *всех* решений относительно тех же прямых не может снова быть 2-2-0-1. Следовательно, задача сводится к одному из уже разобранных случаев №№1°, 2°, 3° или 4.1°.

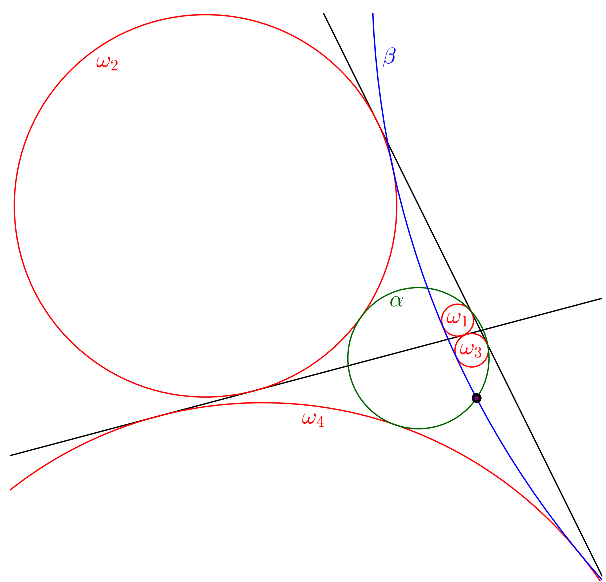


Рис. 14: К доказательству случая 4.2°

Второй случай: среди исходных объектов или среди решений есть касающиеся. Будем считать исходной пятерку, в которой есть пара касающихся объектов. Переведем их инверсией в (горизонтальные) параллельные прямые. Докажем, что среди оставшихся трех исходных объектов (мы их обозначим, как обычно, α, β и γ) не может быть горизонтальной прямой.

Лемма 7.1. *Пусть в конфигурацию нескольких исходных объектов входят 3 параллельные прямые, а количество решений больше 2-х. Тогда все исходные объекты — параллельные прямые или ∞.*

Доказательство леммы 7.1. Заметим, что в условиях леммы все решения являются горизонтальными прямыми или ∞, т. е. все они касаются в точке ∞. Но если решений больше 2-х, и все они касаются в одной точке, то, очевидно, и все исходные объекты касаются в той же точке, что и требовалось. □

Среди Т-типов I—IX только два имеют 5 или более решений. Это типы I и II, распределения решений для них одинаковы и равны 4+2. Значит, распределение 5-и решений может иметь вид 3+2 или 4+1. Разберем эти случаи.

1° Распределение решений 4+1.

Лемма 7.2. *Пусть зафиксированы две горизонтальные прямые и некоторые окружности α и β порождают 4 общих окружности-решения. Тогда линия центров окружностей α и β вертикальна.*

Доказательство леммы 7.2. Предположим противное и обозначим множество из 4-х общих окружностей-решений для α и β через X. Это множество симметрично относительно вертикальных прямых, на которых лежат центры α и β. По нашему предположению, эти прямые не совпадают, поэтому X переходит в себя при симметрии относительно каждой из некоторых двух параллельных прямых. Но тогда X переходит в себя и при некотором параллельном переносе т. е. является бесконечным — противоречие. □

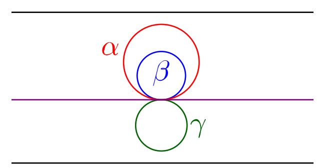


Рис. 15: Распределение 4+1

По этой лемме имеем, что центры α, β и γ лежат на одной вертикальной прямой, а тогда они касаются прямой-решения в одной и той же точке, т. е. образуют вырожденную тройку (см. Рис. 15), что исключено леммой 7.1.

2° Распределение решений 3+2. В этом случае среди решений есть две параллельные прямые, поэтому радиусы окружностей α, β и γ равны половине расстояния между этими прямыми, а их центры лежат на одной горизонтальной прямой (см. Рис. 16 слева). То же можно сказать и про три оставшихся решения-окружности (поскольку среди исходных объектов есть две параллельные прямые). Получаем два множества окружностей X и Y, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. В X и Y по три окружности.

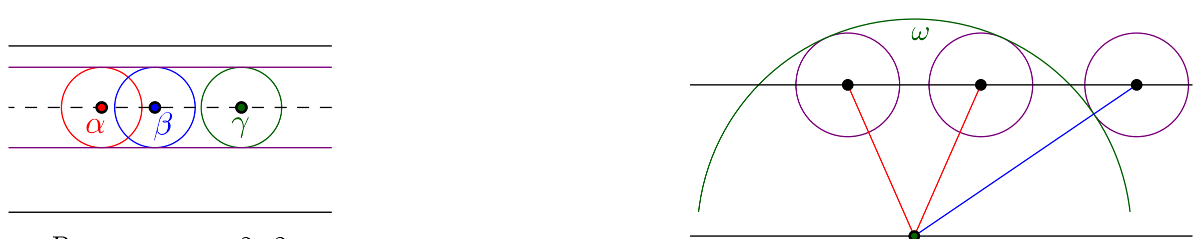
2. В каждом из множеств окружности имеют равный радиус.

3. В каждом из множеств центры окружностей лежат на одной прямой, причем для X и для Y эти прямые параллельны (горизонтальны).

4. Любые две окружности из разных множеств касаются.

Мы докажем, что одновременное соблюдение этих условий невозможно.

Возьмем из $X \cup Y$ окружность ω с самым *левым* центром. Расстояние между центром окружности из X и центром окружности из Y может принимать одно из двух значений, в зависимости от того, внутреннее касание или внешнее. Поэтому из трех таких расстояний для окружности ω найдутся два равных. Центры соответствующих окружностей образуют равнобедренный треугольник, одна из вершин которого окажется *левее* центра окружности ω (Рис. 16 справа). Полученное противоречие завершает доказательство данного случая и всей теоремы 2. □



Распределение 3+2

Финальное рассуждение

Рис. 16:

8 Доказательство теоремы 3

Доказательство. Возьмем произвольную четверку объектов с ровно 6-ю решениями. По лемме 6.1 среди исходных объектов нет точек. Предположим, что среди исходных объектов есть касающиеся. Переведем их в параллельные прямые. Остаются еще два исходных объекта α и β, и по лемме 7.1 ни один из них не может быть горизонтальной прямой. Но всего имеется 6 решений, поэтому α и β должны иметь I или II тип (см. Табл. 2). Распределение решений для каждого из этих типов равно 4+2, поэтому среди решений есть две параллельные горизонтальные прямые, и линия центров α и β горизонтальна, а их радиусы равны. Однако среди решений есть и 4 окружности, поэтому по лемме 7.2 линия центров α и β вертикальна — противоречие, и среди исходных объектов нет пар касающихся.

Рассмотрим те же случаи, что и в доказательстве теоремы 1.

Первый случай: среди исходных окружностей или прямых какие-то две пересекаются. Переведем их инверсией в пересекающиеся прямые. Заметим, что среди I-типов, которые не содержат касающихся объектов, только типы I и II имеют не менее 6 решений. Поэтому оставшиеся исходные окружности α и β имеют I или II тип, и возможно 3 случая. Разберем их по отдельности.

1° Обе окружности $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ имеют II тип (см. Рис. 17). Тогда α и β пересекают обе стороны одного и того же сектора (иначе распределения решений для них пересекаются не более, чем по 4-м окружностям). Пусть это I сектор. Тогда по лемме 6.2 в секторах II и IV не более 2-х решений, а значит, в I секторе есть 4 решения, причем α и β касаются их в одной и той же комбинации знаков «$+--+$», считая от O. По лемме 5.3 окружности α и β симметричны относительно биссектрисы секторов I и III.

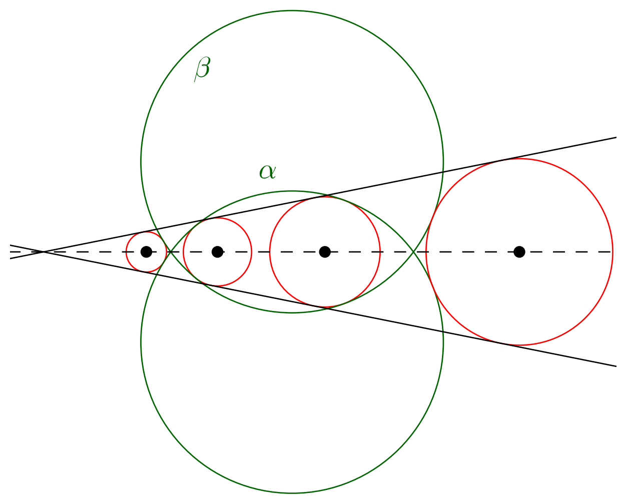


Рис. 17: Обе исходные окружности II типа

Очевидно, что центр любой окружности, касающейся α и β внешним образом должен лежать на их оси симметрии (т. к. радиусы окружностей α и β равны), т. е. на биссектрисе секторов I и III. Но центры решений в секторах II и IV, которые как раз касаются α и β внешним образом, лежат на биссектрисе секторов II и IV — противоречие. Значит, этот случай вообще невозможен.

2° Одна окружность I типа ($\boldsymbol{\alpha}$) и одна окружность II типа ($\boldsymbol{\beta}$; см. Рис. 18 слева). Пусть β пересекает обе стороны II сектора. Тогда распределение решений равно 2-2-2-0. Сперва нам потребуется следующая (интересная и сама по себе) лемма.

Лемма 8.1. *Пусть окружность I типа α и окружность II типа β, пересекающая обе стороны II или IV сектора, порождают 4 общих решения с распределением 2-0-2-0. Тогда множество этих решений симметрично относительно точки пересечения прямых O.*

Доказательство леммы 8.1. Обозначим общие решения через ω_i (в том порядке, в котором они касаются любой из прямых), а через a_i обозначим длину касательной из O к ω_i для $i = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим инверсию с центром в O, оставляющую β на месте (такая инверсия существует т. к. O лежит вне любой окружности II типа). При такой инверсии прямые также остаются на месте, поэтому решения для β должны перейти в решения для β. Кроме того, после инверсии любое решение для β

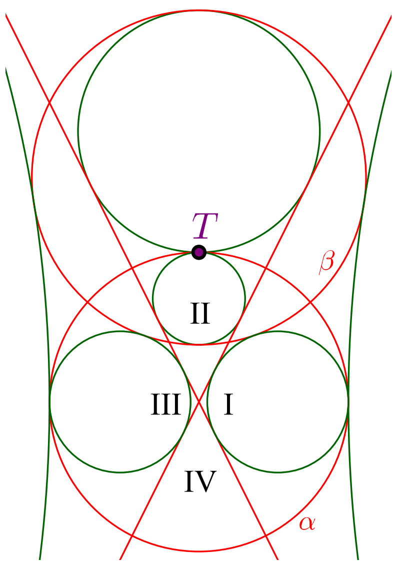
остается в своем секторе. Но решения для β в секторах I и III — это как раз окружности ω_i для $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, ω_1 меняется с ω_2, а ω_3 меняется с ω_4. Отсюда $a_1a_2 = a_3a_4$.

Рассмотрим композицию инверсии и центральной симметрии с центром в O, оставляющую α на месте (такое преобразование существует т. к. O лежит внутри любой окружности I типа). В этом случае любое решение для α переходит в противоположный сектор, поэтому ω_1 меняется с ω_3, а ω_2 меняется с ω_4. Отсюда $a_1a_3 = a_2a_4$.

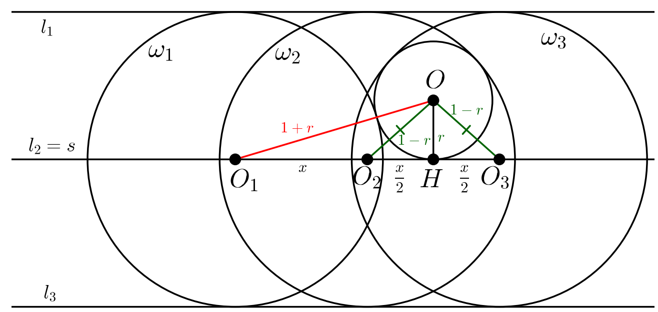
Из полученных равенств следует, что $a_1 = a_4$ и $a_2 = a_3$, что и требовалось. $\square$

Из этой леммы получаем, что α и β переходят в себя при симметрии относительно биссектрисы секторов II и IV. Поэтому оба решения во II секторе касаются α в одной и той же точке T. По лемме 4.4 получаем, что окружности α и β имеют общие точки в секторах I и III. Поэтому во II секторе они общих точек не имеют, и $T \notin \beta$.

Докажем теперь, что исходная четверка соответствует конфигурации №3. Сделаем инверсию с центром в точке T. Тогда оба решения во II секторе и α переходят в некоторые 3 параллельные прямые l_1, l_2, l_3. Пусть l_2 — образ α, а расстояние между l_1 и l_3 равно 2. Так как $T \notin \beta$, то β переходит в некоторую окружность ω_2, касающуюся l_1 и l_3. Пересекающиеся прямые переходят в окружности ω_1 и ω_3, касающиеся l_1 и l_3, причем в силу симметрии центры этих окружностей равноудалены от центра ω_2 (см. Рис. 18 справа). Обозначим это расстояние через x, а центры ω_i через O_i для $i = 1, 2, 3$.



Изначальная конструкция



Результат инверсии в T

Рис. 18: Одна окружность I типа и одна окружность II типа

Обозначим через s прямую, равноудаленную от l_1 и l_3. Четыре решения в секторах I и III при инверсии переходят в окружности, касающиеся ω_1, ω_2 и ω_3 в соответствии с комбинациями «$+--$» и «$--+$». Рассмотрим одну из этих комбинаций и обозначим соответствующие подходящие окружности через σ_1 и σ_2. По лемме 5.3 окружности σ_1 и σ_2 симметричны относительно s — линии центров ω_i. Поэтому радиусы окружностей σ_1 и σ_2 равны, а их линия центров вертикальна. Следовательно, σ_1 и σ_2 должны касаться l_2 в одной и той же точке, и l_2 совпадает с s.

Обозначим радиус образа любого из решений в секторе I или III через r, а его центр через O. Имеем $OO_1 = 1+r$, $OO_2 = OO_3 = 1-r$. Пусть OH — высота равнобедренного $\triangle O_1OO_2$. Имеем $O_2H = HO_3 = x/2$, $OH = r$. По теореме Пифагора в $\triangle O_1HO$ и $\triangle O_2HO$:

$$\begin{cases} OH^2 + HO_1^2 = OO_1^2 \\ OH^2 + HO_2^2 = OO_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = (1+r)^2 - r^2 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 = (1-r)^2 - r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9x^2}{4} = 1 + 2r \\ \frac{x^2}{4} = 1 - 2r \end{cases}$$

Отсюда $x = 2/\sqrt{5}$, $r = 2/5$, что соответствует конфигурации №3.

3° Обе окружности α и β имеют I тип. Тогда в каждом секторе не более двух решений и возможны распределения 1-2-1-2 и 1-1-2-2 (распределение 2-2-2-0 невозможно, т. к. иначе по лемме 4.1 α и β имеют 3 общие точки). Разберем их по отдельности.

3.1° Распределение 1-2-1-2. Тогда α и β касаются решений в секторах II и IV в комбинации «$+--+$» (в том порядке, в котором они касаются любой из прямых). По лемме 5.3 окружности α и β симметричны относительно биссектрисы секторов II и IV. Получаем конфигурацию №2.

3.2° Распределение 1-1-2-2. Тогда по лемме 4.1 α и β имеют общую точку в секторах I и II. Сделаем инверсию в одной из них. Заметим, что одна из прямых разделяет точки пересечения α и β, а другая — нет (см. Рис. 14). Поэтому после инверсии одна из прямых перейдет в окружность I типа, а другая перейдет в окружность II типа. Это соответствует случаю №2°, который уже рассмотрен.

Второй случай: никакие две окружности или прямые из исходных четырех не пересекаются.

Лемма 8.2. *Даны 3 попарно непересекающиеся окружности и 6 решений. Тогда можно выбрать 2 исходные окружности из данных 3-х и 4 решения из данных 6-и так, что если перевести инверсией выбранные исходные окружности в концентрические, то выбранные решения будут одного типа (A или B).*

Доказательство леммы 8.2. Рассмотрим таблицу из 3-х строк и 6-и столбцов, где строки соответствуют окружностям, а столбцы — решениям. На пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит бит «1», если i-ая окружность касается с j-го решения внешним образом, и бит «0» — если внутренним. Докажем, что найдутся 2 строки и 4 столбца такие, что 4 пары битов в выбранных столбцах совпадают с точностью до замены обоих битов в паре на противоположные.

Обозначим строки таблицы через a, b и c. Рассмотрим побитовые суммы $a \oplus b$, $b \oplus c$ и $c \oplus a$. Если в какой-то из них найдутся 4 одинаковых бита, то соответствующая пара строк и четверка столбцов является искомой. В противном случае, в каждой из рассматриваемых побитовых сумм ровно три бита «0» и три бита «1», т. е. общее количество единиц в этих суммах равно 9 — нечетное число. Но сумма рассматриваемых сумм равна, очевидно, нулевой строке, т. е. общее количество единиц в этих суммах четно — противоречие.

Заменим теперь бит «1» на знак «$+$» и бит «0» на знак «$-$». Рассмотрим 2 окружности и 4 решения, соответствующие найденным нами строкам и столбцам. Заметим, что для 2-х окружностей существует всего лишь 2 комбинации знаков с точностью до замены обоих на противоположные: «$++$» или «$+-$». В случае непересекающихся окружностей одна из этих комбинаций соответствует решению, разделяющему исходные окружности, а другая — решению, не разделяющему исходные окружности. Поэтому и после инверсии, переводящей выбранные окружности в концентрические, выбранные решения будут одновременно разделять или не разделять концентрические окружности, т. е. все принадлежать к типу A или все к типу B. □

Продолжим разбор второго случая теоремы 3. Применим лемму 8.2 и переведем соответствующие окружности в концентрические. Остаются две исходные окружности α и β, порождающие 6 общих решений, из которых 4 имеют один и тот же тип. По лемме 6.3 окружности α и β лежат либо на одном диаметре, либо на перпендикулярных диаметрах. Разберем эти случаи по отдельности.

1° Окружности α и β лежат на одном диаметре. Сделаем инверсию в точке пересечения симметричных решений (они найдутся согласно лемме 3.3), переводя их в пересекающиеся прямые a и b. Рассмотрим 6 решений в качестве исходных объектов (назовем их *новыми исходными объектами*), а 4 исходных объекта в качестве решений (назовем их *новыми решениями*). Тогда по лемме 6.6 новые решения имеют распределение 2-0-2-0 относительно a и b. Новые исходные объекты при этом должны иметь I или II тип, и по лемме 5.2 (примененной для 4-х новых решений) получаем, что объектов каждого из этих типов не больше двух. Поэтому есть новый исходный объект каждого из этих типов. После применения леммы 8.1 имеем конфигурацию №1.

2° Окружности α и β лежат на перпендикулярных диаметрах (см. Рис. 19). Тогда по лемме 6.3 четыре общих решения для α и β имеют тип B, а их центры образуют прямоугольник. Также α и β порождают еще 2 общих решения типа A.

Пусть R и r — радиусы концентрических окружностей, $R > r$. Обозначим решения типа A через σ_1 и σ_2. Далее, пусть A_1, B_1 — точки касания σ_1 с α и β соответственно, A_2, B_2 — точки касания σ_2 с α и β соответственно.

Докажем теперь, что исходная четверка соответствует конфигурации №4. Сделаем инверсию с центром в O и радиусом $\sqrt{Rr}$. При такой инверсии все решения типа B перейдут в противоположные себе (т. к. степень точки O относительно всех решений типа B равна $-Rr$). Образы окружностей α и β должны касаться этих решений, поэтому α и β перейдут в себя. Это значит, что степень точки O относительно α и β равна Rr. Однако степень точки O относительно всех окружностей типа A также равна Rr, поэтому

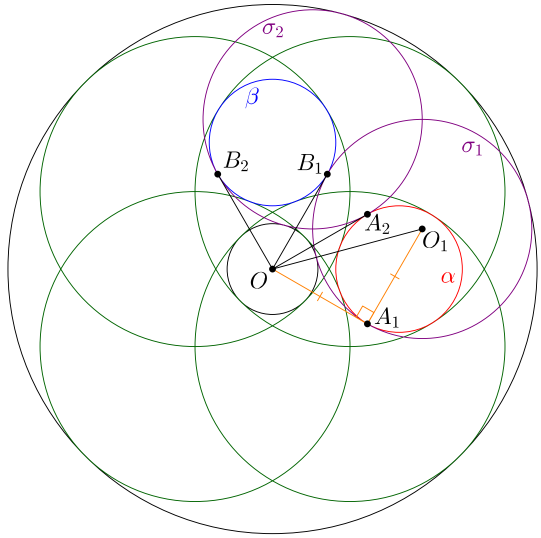


Рис. 19: Случай непересекающихся исходных окружностей

O лежит на радикальной оси σ_1 и α. Следовательно, OA_i — общая касательная к σ_i и α для $i = 1, 2$. Аналогично OB_i — общая касательная к σ_i и β для $i = 1, 2$, причем $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = \sqrt{Rr}$. Более того, $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, т. к. это угол, под которым все решения типа A видны из O. Поэтому и $\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$, а так как $OA_1 = OB_1$, то радиусы окружностей α и β равны. Тогда при повороте на 90° относительно O окружности α и β совпадут, а тогда A_1 и B_1 совпадут, т. е. $\angle A_1OB_1 = 90^\circ$ (см. Рис. 19).

Далее, пусть O_1 — центр σ_1. Он лежит на биссектрисе прямого угла $\angle A_1OB_1$. Поэтому $\triangle OA_1O_1$ — прямоугольный равнобедренный, откуда

$$OA_1 = A_1O_1 \Leftrightarrow \sqrt{Rr} = \frac{R-r}{2} \Leftrightarrow 4Rr = (R-r)^2 \Leftrightarrow R^2 - 6Rr + r^2 = 0$$

Следовательно, $R/r = 3 + 2\sqrt{2}$, что соответствует конфигурации №4. Теорема 3 доказана. □

Благодарности

Я признателен Ф. К. Нилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Неоценимую помощь в подготовке и улучшении данного текста оказал М. Б. Скопенков. Также хотелось бы поблагодарить М. А. Волчкевича за формулировку задачи, из развития которой впоследствии появилась данная работа.

Список литературы

[1] *A. Bruen, J. C. Fisher, J. B. Wilker* Apollonius by Inversion // Mathematics Magazin, vol. 56, no. 2 (1983), pp. 97—103.

[2] *T. E. Cecil* Lie sphere geometry. Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] *Zlobec, Borut Jurčič; Mramor Kosta, Neža* Configurations of cycles and the Apollonius problem // Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 31, no. 2 (2001), pp. 725—744.

[4] *Г. Гальперин, Ч. Делман* Повесть о трех кругах // Математическое просвещение, сер. 3, том 20, стр. 111—134.

[5] *И. Д. Жижилкин* Инверсия. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2009.

—

Егор Морозов, НИУ ВШЭ, 1 курс
`gorg.morozov@gmail.com`