Обобщения теоремы Штейнера-Лемуса о признаках равнобедренности треугольника

Рабе Алексей Дмитриевич [1], Привалов Александр Андреевич [2]
[1] ГБОУ г. Москвы “Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И. Чуйкова”
[2] This paper is prepared under the supervision of Alexander Privalov and is submitted to the Moscow Mathematical Conference for High-School Students. Readers are invited to send their remarks and reports on this paper to mmks@mccme.ru'

Abstract

In 1840 Jacob Steiner on Christian Rudolf’s request proved that a triangle with two equal bisectors is isosceles. But what about changing the bisectors to cevians? Cevian is any line segment in a triangle joining a vertex of the triangle and a point on the opposite side. Not for any pairs of equal cevians the triangle is isosceles.
Theorem. *If for a triangle ABC there are equal cevians issuing from A and B, which intersect on the bisector or on the median of the angle C, then AC=BC (so the triangle ABC is isosceles).*
Proposition. *Let ABC be an isosceles triangle. Define circle ω to be the circle symmetric relative to AB to the circumscribed circle of the triangle ABC. Then the locus of intersection points of pairs of equal cevians is the union of the base AB, the triangle’s axis of symmetry, and the circle ω.*

1 Исторический обзор

Формулировки основных результатов находятся в параграфе 2.

Данная работа является продолжением исследований, начатых Я. Штейнером, К. Лемусом и А. Ботемой о признаках равнобедренности треугольника. Требовалось выяснить, возможно ли обобщить теорему Штейнера-Лемуса, сформулированную как один из признаков равнобедренного треугольника: е*сли в треугольнике две биссектрисы равны, то он является равнобедренным.*

В ходе проведённых исследований было доказано несколько признаков равнобедренности треугольника, вытекающих из равенства некоторых его чевиан (*чевианой* треугольника называют отрезок, соединяющий вершину с точкой, лежащей на противоположной стороне или ее продолжении и отличной от вершин этой стороны).

Примерами чевиан являются биссектрисы, медианы и высоты. Нетрудно показать, что треугольники с двумя равными высотами или с двумя равными медианами являются равнобедренными. Этот простой факт был, вероятно, известен ученым Древней Греции. Однако с биссектрисами дело обстояло несколько иначе.

В 1840 году Кристианом Людольфом Лемусом был задан вопрос Якобу Штейнеру о возможных доказательствах следующей теоремы, которая вошла в историю как

Теорема Штейнера-Лемуса [3]. *Треугольник с двумя равными биссектрисами является равнобедренным.*

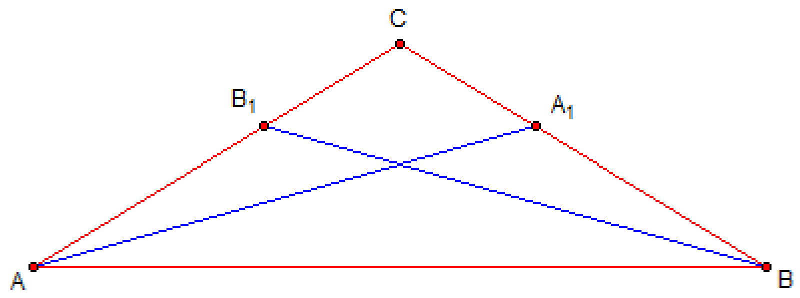

Рис. 1

Но будет ли треугольник равнобедренным, если заменить равные биссектрисы AA_1 и BB_1 на равные чевианы (рис. 1)? То есть, поставим следующую задачу: *выяснить, из равенства каких чевиан треугольника будет вытекать равенство его сторон*. В работе рассмотрены аналоги теоремы Штейнера-Лемуса о признаках равнобедренности треугольника по равными чевианами.

2 Формулировки основных результатов

Чевианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину с точкой, лежащей на противоположной стороне или ее продолжении и отличной от вершин этой стороны. А чтобы избежать путаницы в обозначениях прямой и отрезка, будем обозначать прямую, соединяющие точки A и B, через (AB).

Теорема 1. *Если в треугольнике ABC существуют равные чевианы, пересекающиеся на биссектрисе угла C и выходящие из A и B, то такой треугольник равнобедренный.*

Теорема 2. *Если в треугольнике ABC существуют равные чевианы, пересекающиеся на медиане угла C и выходящие из A и B, то такой треугольник равнобедренный.*

Для треугольника ABC обозначим как C_{ABC} окружность, симметричную окружности, описанной около треугольника ABC, относительно (AB).

Теорема 3. *Если в треугольнике ABC существуют равные чевианы, пересекающиеся на окружности C_{ABC} и выходящие из A и B, то такой треугольник равнобедренный.*

Во избежание неоднозначностей в трактовке, формулируя следующую теорему, будем считать все углы ориентированными. Тогда для $\angle BAC$ луч AA_1 назовем k-трисой ($-\infty < k < \infty$), если $\angle BAA_1 = k\angle BAC$.

Теорема 4 (обобщение теоремы Штейнера-Лемуса). *Если равные чевианы AA_1 и BB_1 являются k-трисами треугольника ABC и $0 < k \leq 1$, то треугольник ABC равнобедренный.*

Теорема 5. *Геометрическое место точек пересечения пар равных чевиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC есть объединение отрезка AB и кубической кривой.*

Тетраэдр называется равногранным, если все его грани – равновеликие треугольники.

Гипотеза 6 (обобщение теоремы Штейнера-Лемуса в трехмерном случае). *Если в тетраэдре все биссектрисы трехгранных углов равны, то такой тетраэдр равногранный.*

3 Доказательство теоремы 1

Для доказательства этой теоремы понадобятся следующие две леммы:

Лемма 1.1. *Треугольники равны, если у них равна сторона, противолежащий угол и биссектриса этого угла.*

Доказательство леммы 1.1. Очевидно, что все треугольники, имеющие по равной стороне и по равному, противолежащему ей углу, вписаны в одну окружность. Биссектрисы этих углов пересекаются точке P, лежащей на этой окружности. На рисунке 2 CD и C_1D_1 – биссектрисы двух таких треугольников ABC и ABC_1. Стоит указать, что точки C и C_1 лежат по одну сторону от диаметра, перпендикулярного AB.

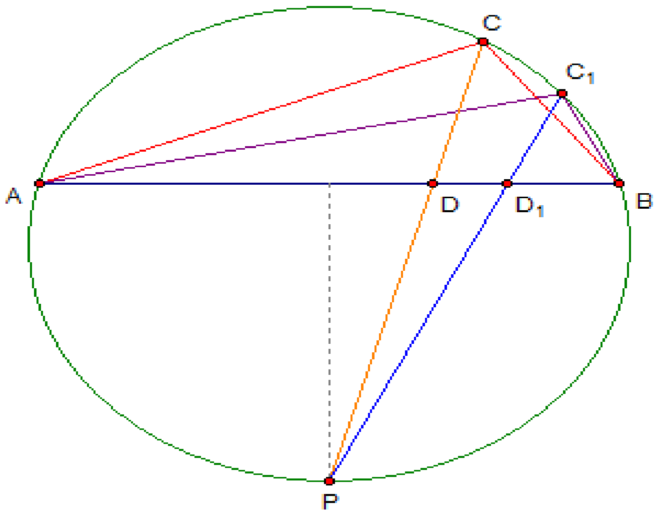

Рис. 2

Тогда следующее соотношение:

$$CD = PC - PD > PC_1 - PD > PC_1 - PD_1 = C_1D_1 \quad (1)$$

показывает, что разным биссектрисам соответствуют разные треугольники.
Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Треугольники равны, если у них равны сторона, противолежащий угол и биссектриса внешнего к этому углу угла.*

Доказательство леммы 1.2. Рассмотрим треугольники ABC и ABC_1 такие, что $\angle ACB=\angle AC_1B$. Хорошо известно, что биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе этого угла. Отсюда следует, что если биссектриса внешнего к $\angle ACB$ угла не пересекает сторону (AB), то биссектриса угла ACB будет являться высотой треугольника ABC. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный, как и треугольник ABC_1. Поэтому, треугольник ABC равен треугольнику ABC_1 (по второму признаку равенства треугольников). Стоит указать, что точки C и C_1 лежат по одну сторону от диаметра, перпендикулярного AB.
Пусть эти биссектрисы пересекают сторону (AB). Обозначим их CE и C_1E_1 (рис.3).

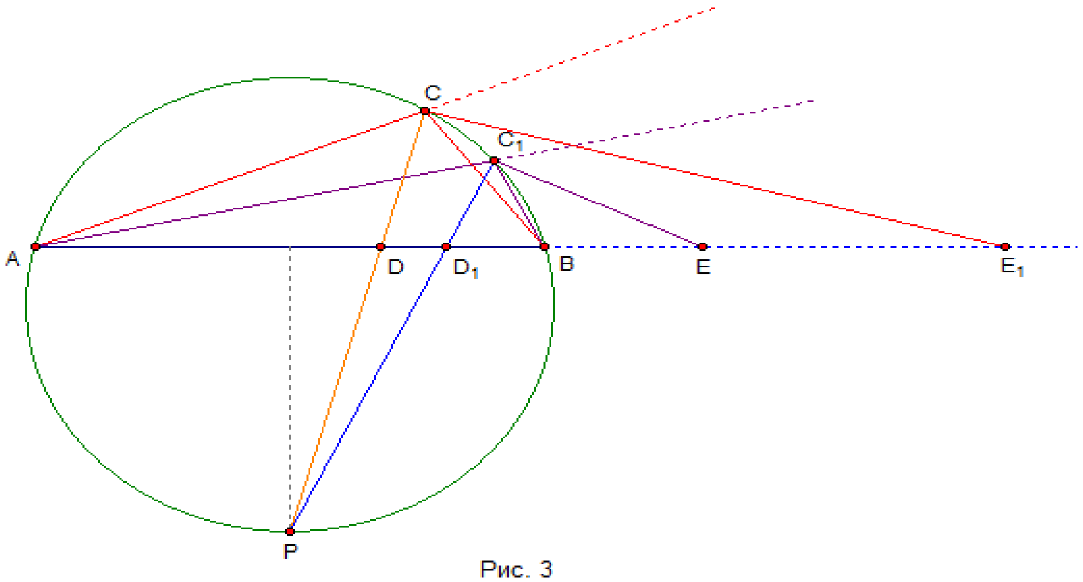

Рис. 3

Из (1) в лемме 1 следует, что катет CD прямоугольного треугольника DCE больше катета C_1D_1 треугольника $D_1C_1E_1$, кроме того, $\angle CDE > \angle C_1D_1E_1$, следовательно $CE > C_1E_1$, т.е. неравным биссектрисам соответствуют неравные треугольники.

Лемма 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим первый случай: отрезки AA_1 и BB_1 параллельны сторонам CB и CA соответственно и пересекаются в точке O, лежащей на биссектрисе (рис.4). Тогда четырехугольник $OABC$ является параллелограммом с диагональю CO, являющейся биссектрисой. Следовательно, $OABC$ – ромб и $CA=CB$.

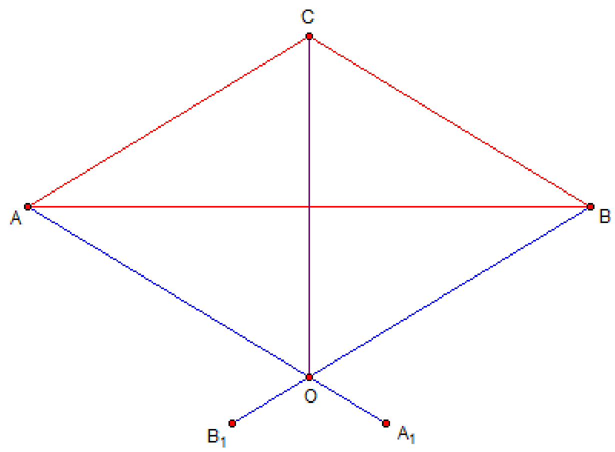

Рис. 4

Второй случай: чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны и пересекаются на биссектрисе (CD) в точке O так, что точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны с точкой C относительно (AB) (рис.5).

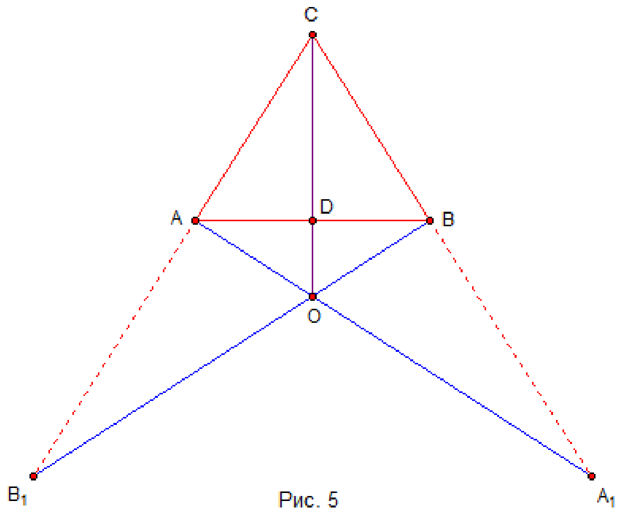

Рис. 5

Здесь, как и выше, из леммы 1.1 следует равенство треугольников ACA_1 и BCB_1, т.е. $CA=CB$ и треугольник ABC – равнобедренный.

Третий случай: чевианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны и пересекаются на биссектрисе (CD) в точке O так, что точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону с точкой C относительно (AB). Для доказательства третьего случая рассмотрим рисунки 6а и 6б.

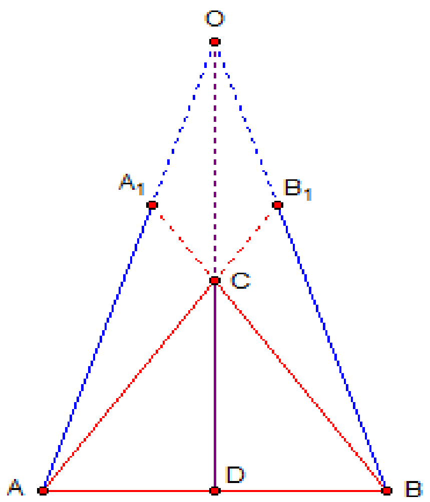

Рис. 6а

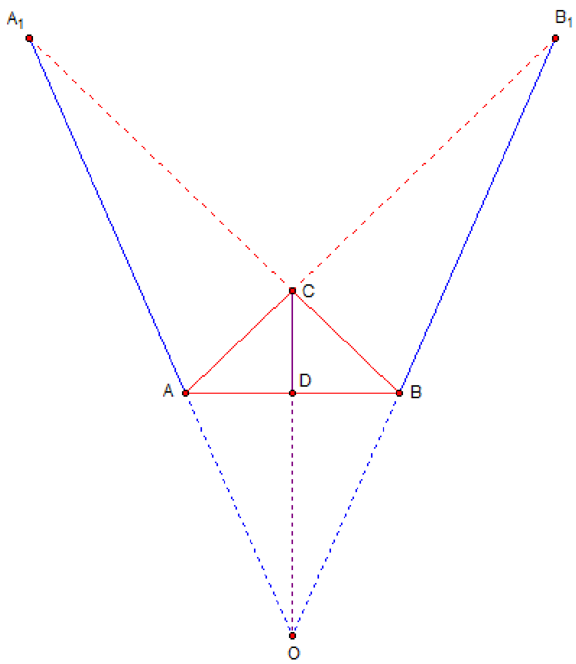

Рис. 6б

Здесь треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равные стороны ($AA_1=BB_1$), равные противолежащие углы ($\angle ACA_1=\angle BCB_1$) общую равную биссектрису CO внешних углов $\angle ACB$. По лемме 1.2 эти треугольники равны, т.е. $AC=BC$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1.3. Ботема рассматривал теорему Штейнера-Лемуса для биссектрис внешних углов треугольника. Он построил треугольник ABC, у которого биссектрисы AA_1 и BB_1 внешних углов равны и равны стороне AB. В этом случае точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой (AB).

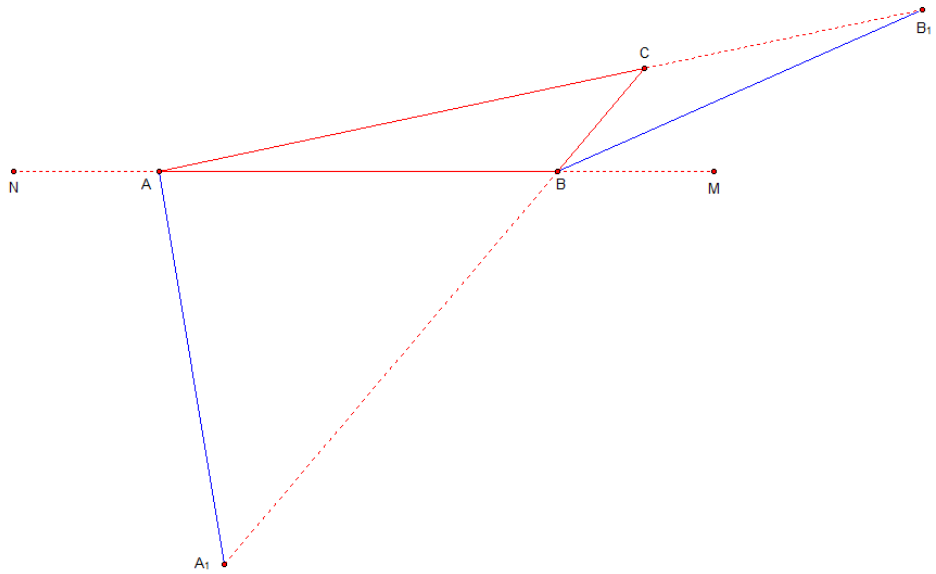

Рисунок к замечанию 1.3

Доказательство. Обозначим угол $\angle CAB=\alpha$. Тогда, т.к. $AB=BB_1$, то $\angle CB_1B=\alpha$. Отсюда и того, что BB_1 – биссектриса угла CBM, то $\angle B_1BM=2\alpha$ и $\angle CBM=4\alpha$. Так как $AB=AA_1$, то $\angle AA_1B=\angle ABA_1=\angle CBM=4\alpha$ и $\angle BAA_1=\pi\text{-}8\alpha$. Далее, AA_1 – биссектриса угла $\angle BAN=\pi\text{-}\alpha$, отсюда имеем $\pi\text{-}\alpha=2(\pi\text{-}8\alpha)$ и $\angle CAB=\alpha=12^0$, $\angle ACB=3\alpha=36^0$ и $\angle ABC=132^0$.

Замечание доказано.

4 Доказательство теоремы

Первое доказательство теоремы 2. Если чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются на медиане, то отрезок A_1B_1 параллелен основанию треугольника AB. Тогда трапеция ABA_1B_1 имеет равные диагонали и, следовательно, является равнобокой (рис. 8).

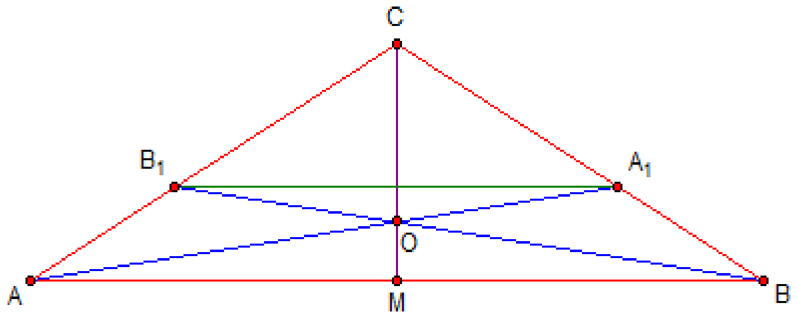

Рис. 8

Второе доказательство теоремы 2. Пусть точка O лежит на медиане CM треугольника ABC . Тогда ее барицентрические координаты будут $O(1 : 1 : x)$. Несложно видеть, что если $x = -1$, то $AOBC$ – параллелограмм; если $x = 0$, то точка O совпадет с точкой M. Эти значения x исключены в связи с тривиальностью решения.

Сначала рассмотрим случай, когда точка O бесконечно удалена. Тогда отрезки AA_1 и BB_1 параллельны и по условию равны. Отсюда следует, что треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равную сторону и равные углы. Следовательно, они равны и треугольник ABC равнобедренный (рис. 9).

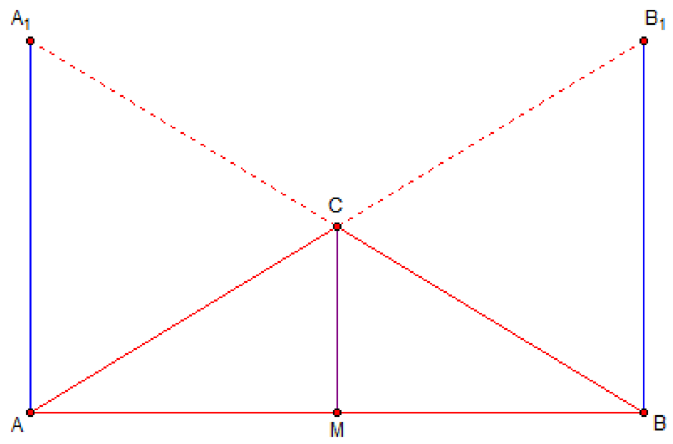

Рис. 9

Пусть теперь точка O лежит на (CM) и является центром масс системы материальных точек $\{1A,1B,xC\}$, тогда точка A_1 является барицентром системы материальных точек $\{1B,xC\}$, а B_1 –центр масс системы $\{1A, xC\}$ (рис. 10).

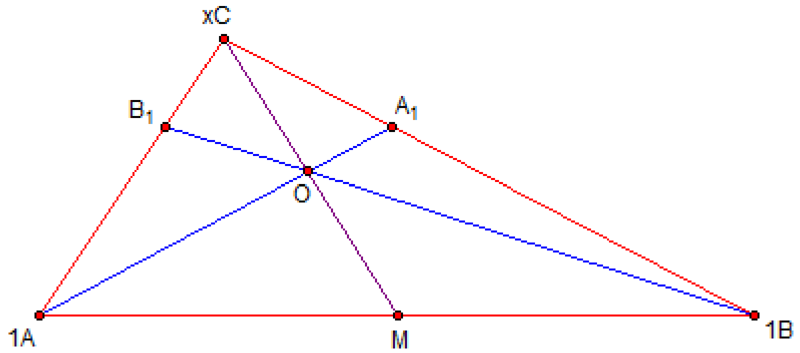

Рис. 10

Отсюда найдем векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{1+x}\left(x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right),\ \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{1+x}\left(x\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$$

Далее, и из равенства длин чевиан имеем

$$\left(x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(x\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 AC^2 + AB^2 + 2x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = x^2 BC^2 + AB^2 + 2x\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA};$$
$$x(AC^2 - BC^2) + 2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})\cdot(x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AB}) = 0;$$
$$2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}(x+2) = 0$$

Значит x = -2 или CM перпендикулярна AB. Случай x = -2 рассмотрен выше (рис.13). Следовательно, CM является высотой и медианой треугольника ABC, т.е. $AC=BC$.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2.1. Пусть точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC соответственно в одинаковых отношениях: $BA_1{:}A_1C=AB_1{:}B_1C=p{:}q$, причем $2q + p \neq 0$. Тогда, если $AA_1=BB_1$, то треугольник ABC равнобедренный.

Доказательство. Пусть $BA_1:A_1C=AB_1:B_1C=p:q$. Рассмотрим систему материальных точек $\{qA, qB, pC\}$. Так как $2q + p \neq 0$, то существует центр масс этой система – точка O. Точки A_1 и B_1 – центры масс систем материальных точек $\{qA, pC\}$ и $\{qB, pC\}$ соответственно. Центр O лежит на пересечении прямых AA_1, BB_1 и CM, где M – барицентр системы $\{qA, qB\}$. Очевидно, что CM – медиана.

Замечание доказано.

5 Доказательство теоремы 3

Пусть T – точка пересечения равных чевиан треугольника, лежащая на окружности C_{ABC}. Сначала заметим, что по условию теоремы точка T не является симметричной вершине C относительно середины отрезка AB (в противном случае (AT) и (BT) будут параллельными сторонам BC и AC соответственно). Случаи $T = A$ и $T = B$ так же исключаются из рассмотрения по понятным причинам.

Теорему 3 можно доказать двумя способами: алгебраическим и геометрическим. Алгебраическое доказательство заключается в том, что позволяет явно выразить длины чевиан AA_1 и BB_1, проходящих через точку T.

Алгебраическое доказательство теоремы 3. Обозначим α, β и γ – углы треугольника ABC. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 1, а его вершины имеют координаты $A(c_1,0)$, $B(c_2,0)$, $C(0,h)$. Тогда

$$AC = 2\sin\beta,\ BC = 2\sin\alpha,\ AB = 2\sin\gamma,\ c_1 = -2\sin\beta\cos\alpha,$$
$$c_2 = 2\sin\alpha\cos\beta,\ h = 2\sin\alpha\sin\beta,\ \overrightarrow{BC} = (h, c_2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{AC} = (h, c_1)^{\mathrm{T}}$$

где операция $(*)^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование.

Уравнение окружности, симметричной относительно AB окружности описанной около треугольника ABC запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \sin t + \dfrac{c_1 + c_2}{2} \\ y = \cos t - \cos\gamma \end{cases},\ 0 \le t \le \pi$$

Теперь, из векторных уравнений прямых (AT) и (BC) имеем

$$\overrightarrow{AT}\tau + A = \overrightarrow{BC}\tau_1 + B,\ \overrightarrow{AT}\tau = \overrightarrow{BC}\tau_1 + \overrightarrow{AB}$$

Умножим обе части этого равенства на вектор $(h,c_2)^{\mathrm{T}}$ – ортогональный вектору $\overrightarrow{BC}$:

$$\tau\begin{pmatrix}\sin t+\frac{c_1+c_2}{2}-c_1\\ \cos t-\cos\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin\gamma\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ c_2\end{pmatrix},\ \tau(h\sin t+h\sin\gamma+c_2\cos t-c_2\cos\gamma)=2h\sin\gamma$$

$$\tau\cdot 2\sin\alpha(\sin\beta\sin t+\cos\beta\cos t+\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\tau\cdot(\cos(t-\beta)-\cos(\gamma+\beta))=2\sin\beta\sin\gamma,\ \tau\cdot(\cos(t-\beta)+\cos\alpha)=2\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\tau\cos\frac{\alpha-t+\beta}{2}\cos\frac{t+\alpha-\beta}{2}=\sin\beta\sin\gamma,\ \tau=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma+t}{2}\cos\frac{t+\alpha-\beta}{2}}$$

Отсюда

$$AA_1^2=\tau^2AT^2=\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}((\sin t+\sin\gamma)^2+(\cos t-\cos\gamma)^2)=$$

$$=\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}(2-2\cos(t+\gamma))=\frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\frac{\gamma+t}{2}}{\sin^2\frac{\gamma+t}{2}\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}=\frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}$$

Аналогично находим BB_1 и окончательно получаем:

$$BB_1=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}\qquad\text{и}\qquad AA_1=\frac{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{t+\alpha-\beta}{2}}$$

Отсюда следует, что если $AA_1 = BB_1$, то $\alpha = \beta$.

Теорема 3 доказана.

Для геометрического доказательства этой теоремы понадобятся следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные острые углы $\angle C=\angle C_1$, равные стороны $AB = A_1B_1$ (или $CB = C_1B_1$) и $\angle A+\angle A_1 = \pi$. Тогда $CB=C_1B_1$ (или $AB=A_1B_1$).*

Доказательство этой леммы следует из рисунка 11.

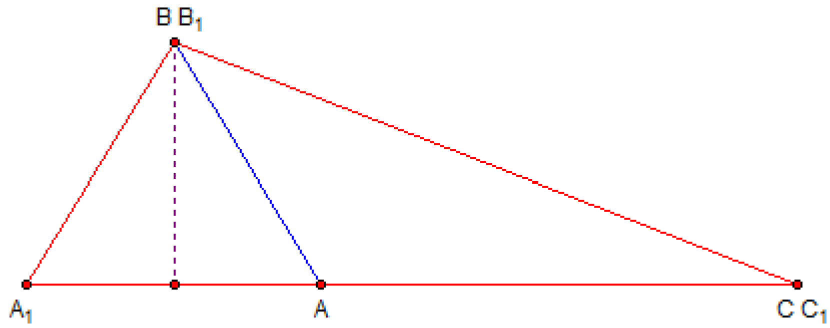

Рис. 11

Геометрическое доказательство теоремы 3. Из всех возможных конфигураций рассмотрим три, изображенных на рисунке 12, где A, B, C – вершины треугольника ABC, T – точка на окружности, AA_1, BB_1 – чевианы, проходящие через T, C_1 – точка симметричная точке C относительно (AB).

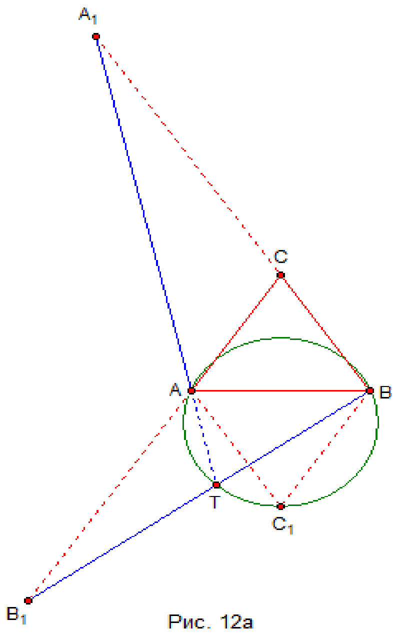

Рис. 12а

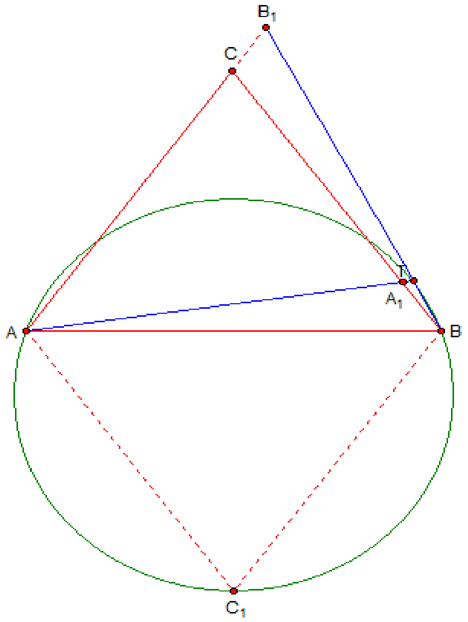

Рис. 12б

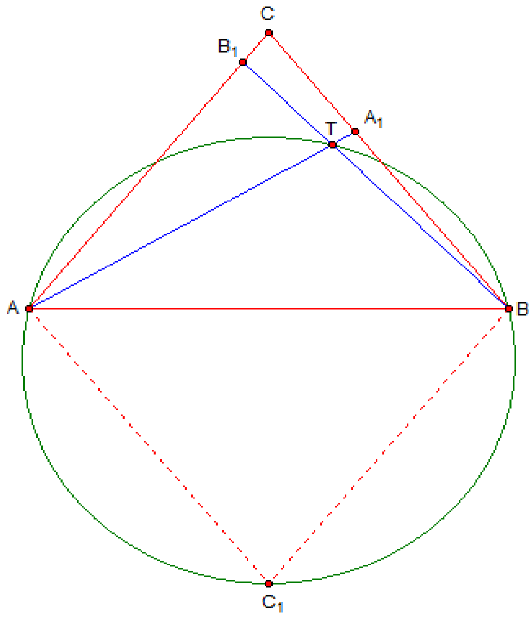

Рис. 12в

Для случая а), когда точка T лежит вне треугольника и под стороной AB, рассмотрим треугольники AA_1C и AB_1T. Углы B_1AT и A_1AC равны как вертикальные. Так как $\angle ATB$ и $\angle ACB$ вписанные и опираются на дугу AB, то $\angle ATB_1 = \angle ACA_1$, значит $\angle AB_1T = \angle AA_1C$. Отсюда следует, что треугольники AA_1C и BB_1C имеют равные углы ($\angle AB_1T = \angle AA_1C$), равные стороны ($BB_1=AA_1$) и $\angle ACA_1+\angle BCB_1= \pi$. По лемме 3.1 стороны BC и AC равны.

В случае б) рассмотрим треугольники BA_1T и BB_1C. Они имеют общий угол A_1BT и равные углы BTA_1 и BCB_1, значит $\angle CB_1B = \angle TA_1B = \angle AA_1C$. Следовательно, треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют равные углы ($\angle AA_1C = \angle BB_1C$), равные стороны AA_1 и BB_1 и $\angle ACA_1+\angle BCB_1= \pi$. По лемме 3.1 стороны BC и AC равны.

В случае с) заметим, что сумма углов B_1TA_1 и B_1CA_1 равна π. Значит треугольники ACA_1 и BCB_1 имеют общий угол C, равные стороны AA_1 и BB_1 и $\angle AA_1C+\angle BB_1C= \pi$. По лемме 3.1 стороны BC и AC равны.

Теорема 3 доказана.

6 Доказательство теоремы 4

В доказательстве этой теоремы будем считать все углы ориентированными.

Очевидно, что если чевианы AA_1 и BB_1 являются 0-трисами углов BAC и ABC, то они совпадают со стороной AB; если же они являются 1-трисами, то совпадут со сторонами AC и BC соответственно. Если $0 < k < 1$, то точка пересечения таких чевиан лежит внутри треугольника ABC и если $k < 0$ или $k > 1$ точка пересечения – лежит вне ABC.

Замечание 4.1. Если k-трисы (AA_1) и (BB_1) не пересекают соответственно стороны BC и AC треугольника ABC, то треугольник ABC равнобедренный.

Доказательство. Так как $AA_1 \| BC$ и $BB_1 \| AC$ и (AA_1) и (BB_1) – k-трисы, то

$$\begin{cases} k\alpha+\beta=\pi \\ k\beta+\alpha=\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta$$

Значит, треугольник ABC – равнобедренный.

Замечание доказано.

Доказательство теоремы 4. Пусть, как и раньше $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. По теореме синусов для треугольников ABB_1 и BAA_1 имеем:

$$\frac{AB}{\sin(k\alpha+\beta)}=\frac{AA_1}{\sin\beta},\ \frac{AB}{\sin(k\beta+\alpha)}=\frac{BB_1}{\sin\alpha}\Rightarrow\ \frac{\sin(k\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin(k\beta+\alpha)\sin\beta}=1$$

Так как AA_1=BB_1, то отсюда имеем

$$\begin{aligned}
&\sin(k\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(k\beta+\alpha)\sin\beta,\\
&\cos((k-1)\alpha+\beta)-\cos((k+1)\alpha+\beta)=\cos((k-1)\beta+\alpha)-\cos((k+1)\beta+\alpha),\\
&\cos((k-1)\alpha+\beta)-\cos((k-1)\beta+\alpha)=\cos((k+1)\alpha+\beta)-\cos((k+1)\beta+\alpha),\\
&\sin\frac{(\alpha+\beta)k}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)(k-2)}{2}=\sin\frac{(\alpha+\beta)(k+2)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)k}{2}
\end{aligned}$$

Это равенство будет выполняться при $\alpha=\beta$. В этом случае треугольник равнобедренный и утверждение верно. Будем считать, что $\alpha>\beta$. Обозначим $u=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$, $v=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда

$$0<v<u<\pi/2 \text{ или } \sin ku\cdot\sin(k-2)v=\sin(k+2)u\cdot\sin kv$$

или

$$\frac{\sin(k+2)u}{\sin ku}=\frac{\sin(k-2)v}{\sin kv}$$

Положим $t=ku$, $\tau=kv$ и $\gamma=\dfrac{2}{k}$. Тогда наше равенство примет вид:

$$\frac{\sin(\gamma+1)t}{\sin t}=-\frac{\sin(\gamma-1)\tau}{\sin\tau}$$

Очевидно, что $0<t<\dfrac{\pi}{\gamma}$ по определению, а $\gamma\geq 2$ – по условию теоремы.

Рассмотрим функции: $\quad f(t)=\dfrac{\sin(\gamma+1)t}{\sin t}\quad$ и $\quad g(t)=-\dfrac{\sin(\gamma-1)t}{\sin t}\qquad$ (3)

где $0<t<\dfrac{\pi}{\gamma}$. Их разность сравним с нулем:

$$\frac{\sin(\gamma+1)t+\sin(\gamma-1)t}{\sin t}=0$$

$$\frac{\sin(\gamma t)\cdot\cos t}{\sin t}=0$$

$$\begin{cases}\sin t\neq 0,\ \cos t\neq 0\ (0<t<\dfrac{\pi}{\gamma})\\ \gamma\cdot t=\pi\cdot m\end{cases}$$

Но $0<\gamma\cdot t<\pi$, значит $\gamma\cdot t\neq\pi\cdot m$, где m – целые числа.

Следовательно, функции $f(t)$ и $g(t)$ не принимают одинаковых значений.

Это и доказывает теорему 4.

При $k > 1$ легко показать, что в любом прямоугольном треугольнике ($\angle C$=90º) 2-трисы равны и равны стороне AB. Однако, имеет место следующие утверждения.

Утверждение 4.2. Не прямоугольный треугольник с равными 2-трисами ($AA_1=BB_1$) равнобедренный.

Доказательство утверждения следует из равенств (1) при $k = 2$.

Утверждение 4.3. Для любого $k > 1$ существуют неравнобедренные треугольники с равными k-трисами.

Доказательство утверждения следует из свойств функций (3).

7 Доказательство теоремы 5

Найдем геометрическое место точек пересечения равных чевиан произвольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и B. Сразу же отметим, что все точки, лежащие на основание AB, принадлежат этому множеству.

Для треугольника ABC введем систему координат с центром в точке M, где CM – медиана треугольника ABC, а ось абсцисс содержит основание AB. Тогда, из теоремы синусов, координаты вершин треугольника ABC имеют вид:

$$A(-c,0),\ B(c,0),$$
$$C\left(c-\frac{2c\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma},\frac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\right)=C\left(\frac{c\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)},\frac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)\tag{4}$$

где $c > 0$ – некоторое число, а α, β, γ – углы треугольника ABC.

Если AA_1 и BB_1 – равные чевианы треугольника ABC, а (x_0,y_0) – точка их пересечения, то из параметрических уравнений прямых (AA_1) и (BC) имеем

$$\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0 \end{pmatrix}\tau+\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\text{умножим на} \begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}\right]$$

$$((x_0+c)\sin\beta+y_0\cos\beta)\tau=2c\sin\beta \Rightarrow \tau=\frac{2c\sin\beta}{(x_0+c)\sin\beta+y_0\cos\beta} \Rightarrow$$

$$|AA_1|^2=\left|\begin{pmatrix} x_0+c \\ y_0 \end{pmatrix}\frac{2c\sin\beta}{(x_0+c)\sin\beta+y_0\cos\beta}\right|^2=\frac{4c^2\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\beta+(x_0+c)\sin\beta)^2}$$

Аналогично найдем квадрат длины BB_1:

$$|BB_1|^2=\frac{4c^2\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\alpha-(x_0-c)\sin\alpha)^2}$$

Отсюда, учитывая равенство этих чевиан, приходим к уравнению:

$$\frac{\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\beta+(x_0+c)\sin\beta)^2}=\frac{\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)}{(y_0\cos\alpha-(x_0-c)\sin\alpha)^2}$$

или

$$\sin^2\beta((x_0+c)^2+y_0^2)(y_0^2\cos^2\alpha-y_0(x_0-c)\sin 2\alpha+(x_0-c)^2\sin^2\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha((x_0-c)^2+y_0^2)(y_0^2\cos^2\beta+y_0(x_0+c)\sin 2\beta+(x_0+c)^2\sin^2\beta)$$

После несложных преобразований и, полагая, для удобства, $x_0=x$, $y_0=y$ и $2c=1$, приходим к уравнению:

$$y((x^2+y^2)(y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)-2x\sin\alpha\sin\beta)+$$
$$+(y^2-x^2)\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+xy(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-$$
$$-2\sin^2\beta\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)+$$
$$+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha))=0$$

Отсюда получаем первое (тривиальное) решение: $y=0$ и кубическую кривую, определяемую уравнением:

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)\sin(\beta+\alpha)(y\sin(\beta-\alpha)-2x\sin\alpha\sin\beta)+\\&+(y^2-x^2)\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+xy(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-\\&-2\sin^2\beta\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)+\\&+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=0\end{aligned} \qquad (5)$$

Как известно, кривые третьего порядка имеют довольно сложные классификации [7], [8]. Отметим некоторые ее свойства.
В [7, стр. 44] показано, что если кубическая кривая имеет вид:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cy^2x+Dy^3+3Ex^2+6Fxy+3Gy^2+3Hx+3Ky+L=0$$

а $y=kx+b$ – уравнение ее асимптоты, то угловой коэффициент k и начальная ордината b определяются равенствами:

$$A+3Bk+3Ck^2+Dk^3=0,\ (B+2Ck+Dk^2)b=-(E+2Fk+Gk^2)$$

при этом начальная ордината b может не существовать. Но, в нашем случае k и b находятся легко и определяются равенствами:

$$(k^2+1)(k\sin(\beta-\alpha)+2\sin\alpha\sin\beta)=0,\ k=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$
$$b=-\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

Таким образом, наша кривая имеет одну асимптоту:

$$y=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}x-\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2\beta} \qquad (6)$$

Следуя классификации Ньютона [7, стр. 47] эта кривая относится ко второй группе, имеет одну асимптоту и одну бесконечную ветвь прямолинейного типа (прямолинейной называется гиперболическая ветвь, вытянутая вдоль прямой, являющейся асимптотой).
Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

Геометрическое место точек пересечения пар равных чевиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC есть объединение отрезка AB и кубической кривой. Эта кривая обладает следующими свойствами:
а) пересекает (AB) ровно в трех точках: A, B и E, причем Е симметрична относительно M – середины AB точке H – основанию высоты CH треугольника ABC;
б) пересекает серединный перпендикуляр стороны AB только в одной точке N, лежащей ниже основания AB и равным высоте CH треугольника ABC ($MN=CH$);
в) ее асимптота параллельна медиане CM треугольника ABC;
г) точка D самопересечения (узел) гиперболы симметрична вершине C относительно M (середины AB).

Доказательства:
а) Заметим, что $A(-\frac{1}{2},0),\ B(\frac{1}{2},0), C\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)},\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ теперь подставляя у равнение (16) y=0, получим утверждение *а*):

$$-2x^3\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha\sin\beta - x^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}x\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta+\alpha)+$$
$$+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=0$$

или

$$x^3\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{2}x^2\sin(\beta-\alpha)-\frac{1}{4}x\sin(\beta+\alpha)-\frac{1}{8}\sin(\beta-\alpha)=0$$
$$x\sin(\beta+\alpha)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0;\quad x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{1}{2};\ x_3=-\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\beta+\alpha)}$$

Аналогично докажем б), подставляя в (5) x=0:

$$y^3\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)+y^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+\frac{1}{4}y\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)+$$
$$+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=0$$
$$y^3\sin(\beta+\alpha)+y^2\sin\alpha\sin\beta+\frac{1}{4}y\sin(\beta+\alpha)+\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta=0$$
$$\left(y+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)}\right)\left(y^2+\frac{1}{4}\right)=0\Rightarrow y_N=-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)}=-y_C$$

Для доказательства в) найдем котангенс угла CMB:

$$\mathrm{ctg}CMB=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}}{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\cos\beta}$$

Отсюда и (6) получаем утверждение г).
Пункт г) достаточно очевиден, т.к. $ACBD$ – параллелограмм. То есть, при приближении к точке D, чевианы становятся параллельными сторонам треугольника (их длины бесконечно возрастают). Однако приведем более строгие рассуждения, полезные для построения нашей кривой.

Для построения полученной гиперболы найдем ее параметрическое представление. В качестве параметра будем использовать величину l – длины чевиан. Очевидно, что $l\geq\max\{h_a, h_b\}$, где h_a и h_b – высоты треугольника ABC, опущенные из вершин A и B соответственно.
Пусть AA_1, AA_2, BB_1 и BB_2 – чевианы треугольника ABC, длины которых равны l. Тогда, легко видеть, что т.к. AB=1, то

$$AB_i=\cos\alpha\pm\sqrt{l^2-\sin^2\alpha},\ BA_i=\cos\beta\pm\sqrt{l^2-\sin^2\beta},\ i=1{,}2 \qquad (7)$$

Найдем точки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ – пересечения чевиан AA_i, BB_j, используя параметрические уравнения прямых (AA_i) и (BB_j), i, j = 1, 2:

$$\left(AB_i\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right)t+\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0\end{pmatrix}=\left(BA_j\begin{pmatrix}-\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\tau+\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}AB_i\cos\alpha-1\\ AB_i\sin\alpha\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-BA_j\cos\beta+1\\ BA_j\sin\beta\end{pmatrix}\tau$$

$$\left(\begin{pmatrix}AB_i\cos\alpha-1\\ AB_i\sin\alpha\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}BA_j\sin\beta\\ BA_j\cos\beta-1\end{pmatrix}=0$$

$$t=\frac{-BA_j\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-(BA_j\sin\beta+AB_i\sin\alpha)}$$

Отсюда получаем параметрическое уравнение нашей кривой
Точнее, мы получили уравнения 4-х кривых, из которых и состоит наша гипербола.

$$\begin{pmatrix}x_{i,j}\\ y_{i,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-BA_jAB_i\sin\beta\cos\alpha+2cBA_j\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-BA_j\sin\beta-AB_i\sin\alpha}+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-BA_jAB_i\sin\alpha\sin\beta}{AB_iBA_j\sin(\alpha+\beta)-BA_j\sin\beta-AB_i\sin\alpha}\end{pmatrix},\ i,j=1,2 \qquad (8)$$

С помощью этих уравнений легко строить наши гиперболы. Кроме того, из (8) видно, что при неограниченном увеличении длин чевиан l полученные 4 кривые пересекаются в узловой точке D:

$$\lim_{l\to\infty}\begin{pmatrix}x_{i,j}\\ y_{i,j}\end{pmatrix}=\lim_{l\to\infty}\begin{pmatrix}\dfrac{-\sin\beta\cos\alpha+\dfrac{\sin\beta}{AB_i}}{\sin(\alpha+\beta)-\dfrac{\sin\beta}{AB_i}-\dfrac{\sin\alpha}{BA_j}}+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\dfrac{\sin\beta}{AB_i}-\dfrac{\sin\alpha}{BA_j}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)}\\ \dfrac{-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\end{pmatrix}$$

Сравнивая с точкой $C\left(\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha+\beta)},\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ получаем утверждение д).

На рисунках ниже представлены примеры наших кривых для треугольников с углами α=20°, β=40° (рис. 13а) и α=40°, β=120° (рис. 13б).

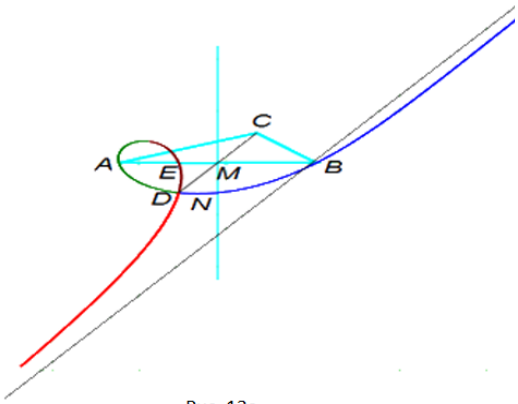

Рис. 13а

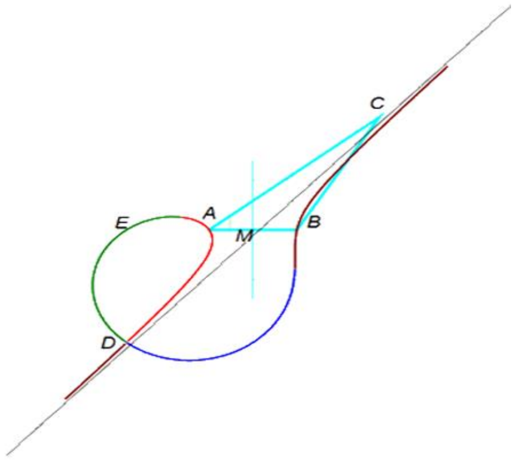

Рис. 13б

В заключении приведем полезное замечание для равнобедренных треугольников:

Замечание 5.1. Геометрическое место точек пересечения пар равных чевиан AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC есть объединение отрезка AB, оси его симметрии и окружности, симметричной относительно AB окружности, описанной около треугольника ABC.

Доказательство. Подставляя в (5) $\alpha=\beta$, получим

$$-2x(x^2+y^2)\sin 2\alpha \sin^2\alpha + 2xy(\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha) + \frac{1}{2}x\sin^2\alpha \sin 2\alpha = 0$$

$$-x(2(x^2+y^2)\sin 2\alpha - 2y\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha) = 0$$

Отсюда имеем первое решение $x=0$, т.е. ось симметрии треугольника ABC. Далее, имеем

$$x^2\sin 2\alpha + y^2\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha = 0,\ y^2 - y\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + x^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(y + \frac{\cos\gamma}{2\sin\gamma}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{1}{2\sin\gamma}\right)^2 = R^2$$

где $\gamma=\pi-2\alpha$, а R – радиус, описанной около треугольника ABC окружности (рис.14).

Замечание доказано.

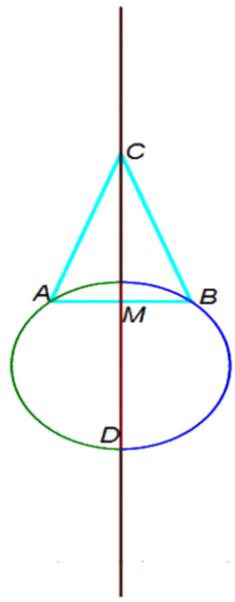

Рис. 14

9 Переходя к трехмерному случаю

В качестве продолжения исследования можно перейти к пространственному случаю, рассматривая тетраэдр и называя чевианой отрезок, соединяющий его вершину с точкой противоположной грани. Постановка задачи в этом случае может быть сформулирована следующим образом: *выяснить, является ли тетраэдр равногранным (т.е. имеющим равные грани), если все его чевианы равны*.

Для удобства будем пользоваться эквивалентным определением равногранного тетраэдра: доказано, что грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда они равновелики. Начнем рассмотрение поставленной задачи с наиболее простых случаев, когда в качестве чевиан тетраэдра выступают его высоты или биссектрисы трёхгранных углов.

Равногранность тетраэдра с равными высотами сразу же вытекает из формулы для вычисления его объема. Попробуем сделать некоторые шаги к проверке гипотезы о равногранности тетраэдра с равными биссектрисами.

10 Пояснение к гипотезе 7

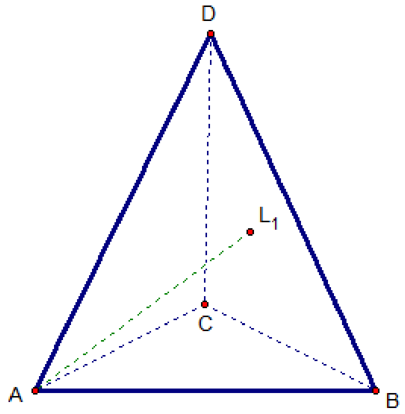

Рис. 15

Биссектрисой трехгранного угла *ABCD* тетраэдра *ABCD* называют отрезок AL_1, соединяющий вершину *A* с точкой противоположной грани L_1 так, что $\angle L_1AB = \angle L_1AC = \angle L_1AD$ (рис. 15). Точка пересечения всех биссектрис тетраэдра является центром вписанного в него шара.
Длины биссектрис тетраэдра могут быть вычислены по следующей формуле:

$$AL_1 = \frac{(S_{ACD}+S_{ABD}+S_{ABC})(AB^2\cdot S_{ACD}+AD^2\cdot S_{ABC}+AC^2\cdot S_{ABD}) - S_{ACD}\cdot S_{ABC}\cdot DB^2 - S_{ACD}\cdot S_{ABD}\cdot CB^2 - S_{ABD}\cdot S_{ABC}\cdot DA^2}{(S_{ACD}+S_{ABD}+S_{ABC})^2}$$

$$BL_2 = \frac{(S_{ABC}+S_{BCD}+S_{ABD})(DB^2\cdot S_{ABC}+CB^2\cdot S_{ABD}+AB^2\cdot S_{BCD}) - S_{ABC}\cdot S_{ABD}\cdot DA^2 - S_{ABD}\cdot S_{BCD}\cdot AC^2 - S_{ABC}\cdot S_{BCD}\cdot DC^2}{(S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABD})^2}$$

$$CL_3 = \frac{(S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABC})(CB^2\cdot S_{ACD}+CD^2\cdot S_{ABC}+AC^2\cdot S_{BCD}) - S_{ACD}\cdot S_{ABC}\cdot DB^2 - S_{ABC}\cdot S_{BCD}\cdot DC^2 - S_{ACD}\cdot S_{BCD}\cdot AB^2}{(S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABC})^2} \quad (9)$$

$$DL_4 = \frac{(S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABD})(BD^2\cdot S_{ACD}+AD^2\cdot S_{BCD}+DC^2\cdot S_{ABD}) - S_{ACD}\cdot S_{ABD}\cdot CB^2 - S_{ACD}\cdot S_{BCD}\cdot AB^2 - S_{ABD}\cdot S_{BCD}\cdot AC^2}{(S_{ACD}+S_{BCD}+S_{ABD})^2}$$

Для проверки гипотезы о равногранности тетраэдра с равными биссектрисами был проведён численный эксперимент для тетраэдра *DABC*, у которого углы грани *ABC* равны $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. Приняв за единицу диаметр описанной около грани *ABC* окружности, получим: $CB = \sin\angle CAB$, $AB = \sin\angle ACB$, $AC = \sin\angle CBA$. С помощью математического пакета Mathcad была решена система нелинейных относительно $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$ уравнений

$$\begin{cases} AL_1 = BL_2 \\ AL_1 = CL_3 \\ AL_1 = DL_4 \end{cases} \text{ с ограничениями: } \begin{cases} DB + DA > CB \\ DB + CB > DA \\ DC + AB > DB \\ DB + AB > AB \\ CB + DA > DB \\ DB + AB > DC \\ DC + DA > AC \\ DC + AC > DA \\ DA + AC > DC \end{cases}$$

В этой системе длины биссектрис AL_1, BL_2, CL_3 и DL_4 рассчитывались по формулам (9), в которых площади граней тетраэдра зависят от неизвестных рёбер *x*, *y* и *z*. Полученное в результате расчёта решение системы $R = \{x, y, z\} = \{8{,}660, 7.071, 9{,}659\}$ позволило сделать вывод о равногранности тетраэдра. В частности, площади его граней оказались равными $S_{ACD} = S_{BCD} = S_{ABD} = S_{ABC} = 118{,}301$ из чего следует, что рассмотренный тетраэдр является равногранным. Тем не менее, понятно, что рассмотренный частный случай позволяет лишь выдвинуть гипотезу о равногранности тетраэдра с равными чевианами (или хотя бы биссектрисами), проверка которой должна служить предметом дальнейших изысканий.

Развитием данной работы может стать рассмотрение трёхмерной задачи о формулировке и доказательстве признаков равногранности тетраэдра, связанными с его чевианами.

Список литературы

[1] *Акопян А.В., Заславский А.А.* Геометрические свойства кривых второго порядка, –М.: МЦНМО, 2011

[2] *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — Изд. 7-е, стереотипное. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1967. — С. 138—139

[3] *Коксетер Г.С. М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией, – М.: Наука. Физматлит, 1978

[4] *Kimberling* Encyclopedia of Triangle Centers

[5] *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника, М.: МЦНМО, 2002

[6] *Мякишев А.Г.* Математическое Образование 4 (68), 2013

[7] *Савелов А.А.* Плоские кривые, систематика, свойства, применения, – М.: Наука, 1960

[8] *Смогоржевский А.С., Столова Е.С.* Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, – М.: Наука. Физматлит, 1961

[9] *Kamila Muraszkowska* “Jak rozpoznać trójkąt równoboczny?”

[10] *Куланин Е.* “Об одной трудной геометрической задаче”