Фишки в вершинах дерева.

Ретинский Вадим, Захаров Дмитрий.

Пусть G – дерево и $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующий процесс на G: в вершинах G расставлены m различных фишек. За ход разрешается передвинуть любую фишку в любую пустую соседнюю вершину. Обозначим через $m(G)$ максимальное число фишек, при котором из любого фишек в вершинах можно получить любое другое за несколько ходов.

Определение 1. *Тракт в дереве G – это путь $(v_1, \ldots, v_k)$ такой, что для любого $i : 3 \leqslant i \leqslant k-2$ выполнено $\deg v_i = 2$. Величина k называется длиной тракта.*

Теорема 1. *Пусть k – максимальная длина тракта в G, тогда $m(G) = |V(G)| - k + 1$.*

Доказательство неравенства $m(G) \geqslant |V(G)| - k + 1$. Заметим, что достаточно научиться менять любые 2 соседние по ребру фишки, а остальные вернуть в исходное положение. Обозначим через $x, y \in V(G)$ соседние вершины, фишки в которых мы хотим поменять. Обозначим z' фишку, стоящую в вершине z в исходном положении. Давайте двигать фишки, отличные от x', y' при неподвижных x', y', максимизируя сумму расстояний по всем фишкам до x. Обозначим через $W \subset V(G)$ объединение $\{x, y\}$ с множеством незанятых вершин в полученной конфигурации. Ясно, что сужение $G|_W$ – это дерево.

Пусть $G|_W$ – это не путь, то есть в нем есть вершина степени хотя бы 3. Тогда очевидно, что фишки x', y', можно поменять местами, а затем вернуть остальные фишки в исходное положение при неподвижных x', y'.

Пусть теперь $G|_W$ – путь. Подвинем пару фишек (x', y') в (v_1, v_2). В пути $G|_W$ $|W| = k+1$ вершина. Обозначим его $v_1, \ldots, v_{k+1}$. Значит, он не является трактом, то есть существует $3 \leqslant i \leqslant k-1$,такое что $\deg v_i \geqslant 3$. Тогда существует фишка, находящаяся по соседству с v_i. Подвинем ее в v_i, затем в v_{i+1}, ..., в v_k. Теперь $G|_{W'}$ – не путь, где W' – объединение множества незанятых вершин в полученной конфигурации с $\{v_1, v_2\}$. Проделав действия, аналогичные предыдущему случаю, поменяем x', y'. Затем проделаем передвижения, обратные ко всем проделанным, кроме перестановки фишек x', y' местами. Тогда фишки x', y' поменяются местами, а остальные вернутся в исходное положение. $\square$

Доказательство неравенства $m(G) \leqslant |V(G)| - k + 1$. Рассмотрим случаи $k = 1, 2, 3$. Если $k = 1$ или $k = 2$, то G состоит из 1 или 2 вершин соответственно, и теорема, очевидно, верна. Если же $k = 3$, то граф $G = K_{1,n-1}$. Для такого графа $m(G) < |V(G)| - 1$, так как иначе если фишка стоит в вершине степени 1, она может переместиться в соседнюю, а потом тут же обратно, и других возможных ходов нет.

Теперь пусть $k \geqslant 4$. Рассмотрим самый длинный тракт $T = (v_1, \ldots, v_k)$. Пусть $m = |V(G)| - k + 2$. Рассмотрим какую-нибудь конфигурацию фишек такую, что на концах тракта стоят по фишке, а больше на тракте фишек нет. Докажем, что мы не сможем поменять их местами. Пусть G' – граф, полученный из исходного удалением всех вершин $v_i : 3 \leqslant i \leqslant k-2$. В случае $k = 4$ удалим ребро (v_2, v_3). Тогда G' имеет 2 компоненты связности, обозначим их за L и R. Можно считать, что $v_1 \in L$, $v_k \in R$. Покрасим все фишки из L в лиловый цвет, а из R – в розовый.

Определим *вес* $p(u)$ вершины u как

$$p(u) = \begin{cases} i & u = v_i \\ 1 & u \in L \\ k & u \in R \end{cases}.$$

Обозначим через $u(x)$ вершину, в которой стоит фишка x. Тогда в начальный момент для любой лиловой фишки x и розовой фишки y имеем $p(u(x)) < p(u(y))$. Покажем, что это будет верно после любого числа ходов.

Рассмотрим первый момент, когда неравенство нарушится. Так как за один ход значение $p(u(x))$ меняется не более, чем на единицу, то верным будет неравенство $p(u(x)) \leqslant p(u(y))$ для лиловой x и розовой y, а для какой-то пары (x_0, y_0) $p(u(x_0)) = p(u(y_0))$. Если $2 \leqslant p(u(x_0) \leqslant k-1$, то $u(x_0) = u(y_0)$, и в одной вершине находится сразу 2 фишки. Если $p(u(x_0)) = 1$, то все лиловые фишки, а также фишка y_0 находятся в вершинах графа L. Но тогда фишек больше, чем вершин. Аналогично, $p(u(x_0)) = k$ быть не может.

Мы получили противоречие, так как в конечный момент лиловая и розовая фишка поменяются местами, и неравенство не будет верным.

$\square$