Погрешность оценки конечной суммы гармонического ряда

Дмитрий Скворцов

8-й класс, Пятьдесят седьмая школа

Гипотеза 1[1]

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1$$

Гипотеза 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1-n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)\right)=1$$

Гипотеза

Для любого натурального i>1 и любого k верно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2(n+k)}{2!n}\right)=0$$

Набросок доказательства Гипотезы 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\ln(n+k)\right)^2}{2!n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Появилась неопределенность в пределе, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\ln(n+k)\right)^2}{2!n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\ln(n+k)\right)^2\right)'}{(2n)'}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2\ln n}{n+k}}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+k)}{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

[1] Эта лемма и ее доказательство приводится в книге В. И. Прасолова «Задачи по алгебре, арифметике, анализу», Москва, МЦНМО 2011

Еще раз воспользуемся им:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+k)}{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\ln(n+k))'}{(n+k)'}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+k}}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

Набросок доказательства Гипотезы 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1-n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n-n\sqrt[n]{n+1}-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}+1\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n-n\sqrt[n]{n+1}-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}+1+\ln n-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}-\ln n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(n-n\sqrt[n]{n+1}+\ln n\right)+1$$

Посчитаем по отдельности каждый из двух пределов.

Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=e^{-\frac{\ln n}{n}}$$

$$e^x=1+x+x^2+o\left(x^2\right)$$

То есть

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=e^{-\frac{\ln n}{n}}$$

Обозначим

$$x=-\frac{\ln n}{n}$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-e^{-\frac{\ln n}{n}}\right)-\ln n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-e^{x}\right)-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x\right)\right)\right)-\ln n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x\right)\right)\right)-nx\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x\right)\right)-x\right)\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x\right)\right)\right)=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{2n}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right)=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{2!n}\right)$$

Последнее выражение - утверждение доказанной гипотезы 1 для k=0, значит, оно стремится к нулю.

То есть

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}-\ln n\right)=0$$

Значит первое слагаемое стремится к бесконечности как натуральный логарифм.

Осталось вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-n\sqrt[n]{n+1}+\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt[n]{n+1}\right)+\ln n\right)$$

Аналогичным способом разложим функцию в ряд Тейлора, используя

$$\sqrt[n]{n+1}=e^{\frac{\ln\left(n+1\right)}{n}}$$

Введем обозначение

$$x=\frac{\ln\left(n+1\right)}{n}$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\sqrt[n]{n+1}\right)+\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n+n\left(1-e^{\frac{\ln\left(n+1\right)}{n}}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n+n\left(1-e^{x}\right)\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n+n\left(1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-n\left(x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln-n\left(x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\ln\left(n+1\right)+\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{2n}+o\left(\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{n}\right)\right)$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\ln\left(n+1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-0\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 1\right)=0$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\ln\left(n+1\right)+\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{2!n}+o\left(\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{2!n}+o\left(\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2\left(n+1\right)}{2!n}\right)$$

Последнее выражение - утверждение доказанной гипотезы для k=1, значит оно стремится к нулю.

То есть

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-n\sqrt[n]{n+1}+\ln n\right)=0$$

В итоге получается

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1-n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n}{\sqrt[n]{n}}-\ln n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(n-n\sqrt[n]{n+1}+\ln n\right)+1=$$

$$=0+0+1=1$$

Благодарность.

Автор благодарит А. Б. Скопенкова за ценные замечания при подготовке текста.