Число $\sqrt[n]{2}$ не является квадратичной иррациональностью

Зубков Кирилл

Здесь приводится короткое доказательство следующей хорошо известной теоремы.

Теорема. Для любого целого $n \geq 3$ число $\sqrt[n]{2}$ не представимо в виде $a \pm \sqrt{b}$ с рациональными a и b.

Доказательство. Пусть число $\sqrt[n]{2}$ представимо в виде $a \pm \sqrt{b}$ с рациональными a и b. Тогда

$$2 = (\sqrt[n]{2})^n = A \pm B\sqrt{b}, \quad \text{где}$$

$$A := a^n + k_1 a^{n-2} b + k_2 a^{n-4} b^2 + \ldots, \quad B := l_1 a^{n-1} + l_2 a^{n-3} b + l_3 a^{n-5} b^2 + \ldots,$$

где $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, l_3, \ldots,$ — положительные числа. Так как $2, A \in \mathbb{Q}$, то $B\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Так как $a \neq 0$ и $b > 0$, то все слагаемые в B имеют одинаковый знак. Значит, $B \neq 0$. Тогда $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Значит, $\sqrt[n]{2} \in \mathbb{Q}$ — противоречие. $\square$