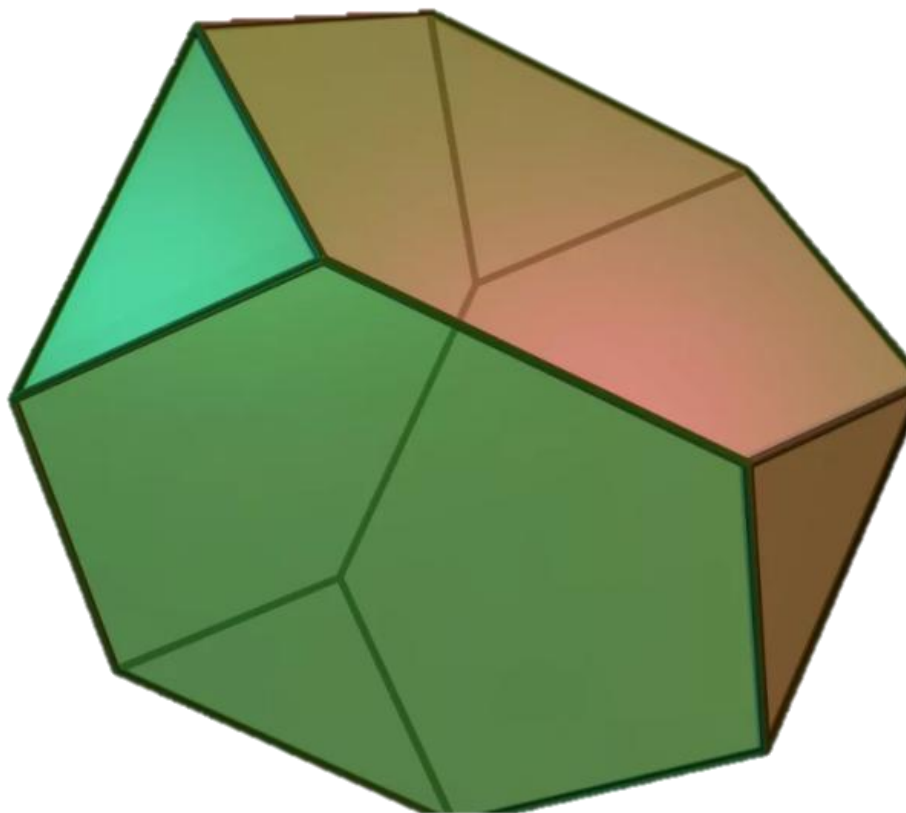


# Геодезические линии на усечённом тетраэдре



Автор: Акиньшин Степан, 9 "С"

Школа Маршала В. И. Чуйкова на Юго-Востоке

Классы "Силаэдр"

Научный руководитель: Абрамов Ярослав  
Владимирович

## Определения:

1. Замкнутая геодезическая на многограннике – замкнутая ломаная  $g$  со следующим свойством: для любой точки  $X \in g$  найдется число  $\varepsilon > 0$  такое, что для любых двух точек  $X_1, X_2 \in g$  удаленных от  $x$  не более, чем на  $\varepsilon$ , кратчайшей ломаной на поверхности тела  $G$ , соединяющей  $X_1$  и  $X_2$ , является часть ломаной  $g$ .

2. Семейство геодезических линий – это множество геодезических линий, проходящих одинаковую последовательность граней и параллельных друг другу внутри каждой грани.

3. Усечённый тетраэдр – это многогранник, получаемый из правильного тетраэдра путём усечения всех вершин (причём плоскость, которую образовало усечение, параллельна грани, противоположной для усечённой вершины, и расстояние между ними равно  $\frac{2}{3}$  от высоты тетраэдра)

## Гипотеза:

*Усечённый тетраэдр имеет семейство геодезических линий, проходящих через три треугольные грани и три противоположные им шестиугольные грани (показано ниже на развёртке усечённого тетраэдра).*

## Наброски доказательства:

1) Пусть дано:

Тело  $\Pi$  – усечённый тетраэдр

Развёртка  $\mathcal{M}$  тела  $\Pi$

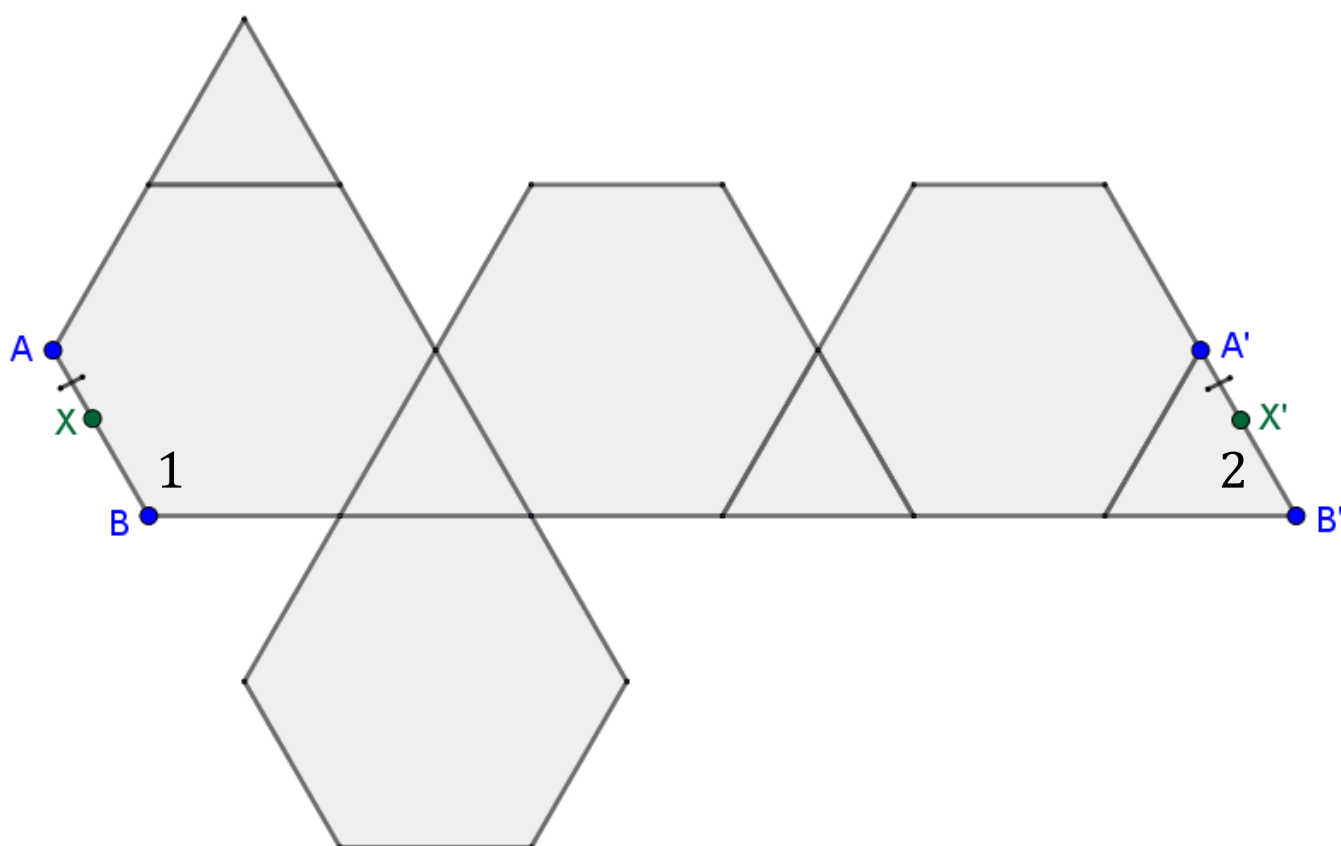
$A_0B_0$  – ребро тела  $\Pi$  между двумя  
треугольными гранями

$AB$  и  $A'B'$  -  $A_0B_0$  на развёртке  $\mathcal{M}$

$X \in AB$

$X' \in A'B'$

$$AX = A'X'$$



Тогда докажем, что  $XX'$  – геодезическая.

Доказательство:

По свойству отрезка (отрезок — кратчайшее расстояние между двумя точками) и свойствам геодезической линии следует, что на развёртке геодезическая линия должна быть прямой, не проходящей через вершины и при этом удовлетворять условию.

Также  $AB$  должна быть параллельна  $A'B'$ , иначе на теле  $\Pi$   $X \neq X'$ , что противоречит условию.

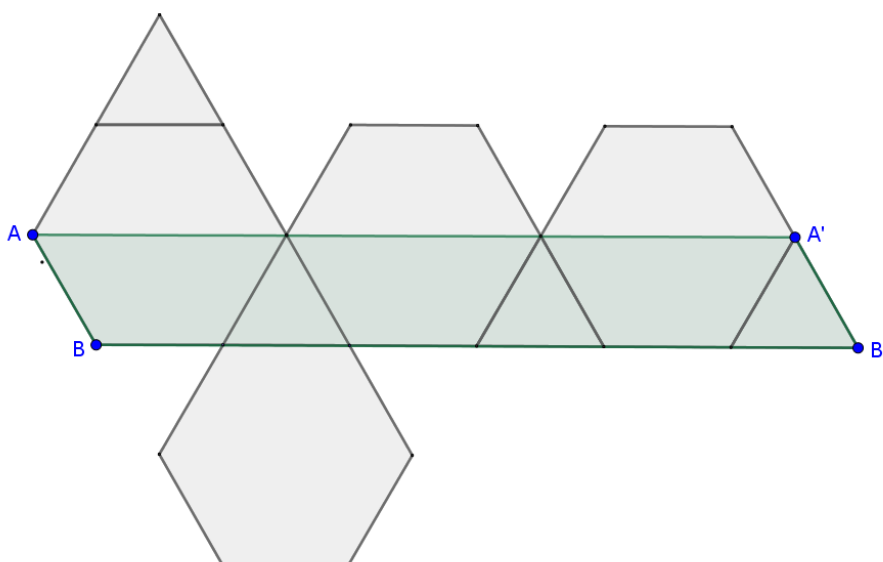
Рассмотрим  $\angle 1$  и  $\angle 2$ . По формуле суммы углов в правильном многоугольнике находим, что:

$$\angle 1 = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(6-2)}{6} = 120^\circ;$$

$$\angle 2 = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(3-2)}{3} = 60^\circ.$$

Рассмотрим  $AB$  и  $A'B'$ , секущая  $AA'$ , тогда  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , следовательно,  $AB \parallel A'B'$  (односторонние углы), следовательно,  $XX'$  – геодезическая.

- 2) Из определения семейства геодезических и пункта 1 следует, что на усечённом тетраэдре существует семейство геодезических, проходящих через три треугольных грани и три противоположные им шестиугольные грани, что и требовалось доказать.



## Список литературы:

[1] — Dmitry Fuchs and Ekaterina Fuchs “Closed geodesics on regular polyhedra”:

<https://www.ams.org/distribution/mmj/vol7-2-2007/fuchs.pdf>

[2] — В.Ю.Протасов “Геодезические на многогранниках”:

<http://www.mcnmo.ru/mmks/mar08/Poincare.pdf>