

# О центрах гомотетий вписанных окружностей и окружностей Тебо

Львов Алексей

## 1 Введение

### 1.1 Формулировка основной теоремы

**Основная теорема.** Пусть  $ABCD$  – вписанный в окружность  $\Omega$  четырёхугольник.  $AC \cap BD = X$ .  $\omega_{CD}$ ,  $\omega_{BC}$  – вписанные окружности треугольников  $XCD$  и  $XBC$  соответственно, а  $\alpha_{AD}$ ,  $\alpha_{AB}$  – окружности, вписанные в криволинейные треугольники  $DXA$  и  $AXB$ .

Тогда центр гомотетии с положительным коэффициентом  $\omega_{CD}$  и  $\omega_{BC}$  совпадает с центром положительной гомотетии  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{AD}$ . А также центр гомотетии с положительным коэффициентом  $\omega_{CD}$  и  $\alpha_{AD}$  совпадает с центром положительной гомотетии  $\omega_{BC}$  и  $\alpha_{AB}$ .

В данном случае окружность вписанная в криволинейный треугольник  $XYZ$ , где  $XU$  и  $YZ$  – отрезки, а  $XZ$  – дуга окружности  $\Omega$ , – это окружность, касающаяся отрезков  $XU$ ,  $YZ$  и дуги  $XZ$ .

См. рис. 1

### 1.2 Вспомогательные факты

Введём некоторые обозначения.

Дан треугольник  $ABD$ .  $\Omega$  – его описанная окружность.  $T_A$  – точка касания  $\Omega$  с его полувписанной окружностью, соответствующей вершине  $A$ .

$I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABD$ .  $B'$ ,  $D'$  – середины дуг  $AD$  и  $BA$  окружности  $\Omega$ .  $A_1$  – точка касания вписанной окружности со стороной  $BD$ .

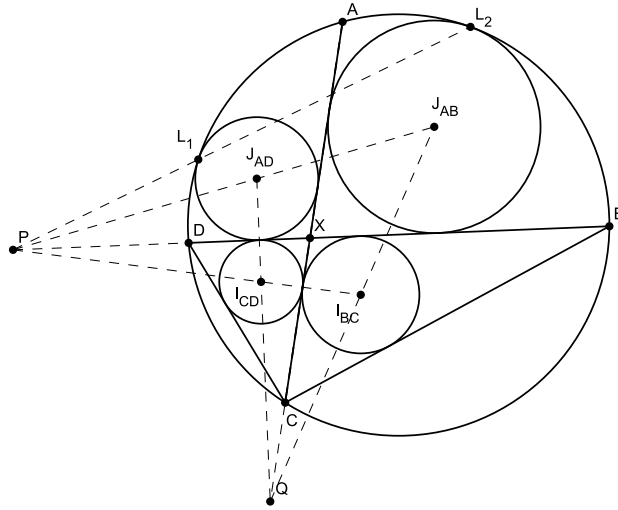


Рис. 1

**Лемма 1.**  $T_A B' A D'$  – гармонический четырёхугольник.

*Доказательство.* Пусть  $B_2, D_2$  – точки касания полувписанной окружности со сторонами  $AD$  и  $AB$ ;  $A_2$  – вторая точка пересечения  $AT_A$  с полувписанной окружностью.

Тогда точки  $T_A, B_2, B'$  и  $T_A, D_2, D'$  лежат на одной прямой по лемме Архимеда. Четырёхугольник  $T_A B_2 A_2 D_2$  гармонический, т. к. касательные в точках  $B_2$  и  $D_2$  пересекаются на диагонали  $A_2 T_A$ . Четырёхугольники  $T_A B_2 A_2 D_2$  и  $T_A B' A D'$  гомотетичны.  $\Rightarrow T_A B' A D'$  тоже является гармоническим.  $\square$

См. рис. 2.

**Лемма 2.**  $\angle D T_A A_1 = \angle A D B$  и  $\angle B T_A A_1 = \angle A B D$ .

*Доказательство.* Пусть  $A_2$  – точка касания вневписанной окружности  $\Omega_A$  треугольника  $ABD$ , соответствующей вершине  $A$ , со стороной  $BD$ , а  $S$  – вторая точка пересечения  $AA_2$  с  $\Omega$ . Тогда пары точек точек  $A_1, A_2$  и  $T_A, S$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку

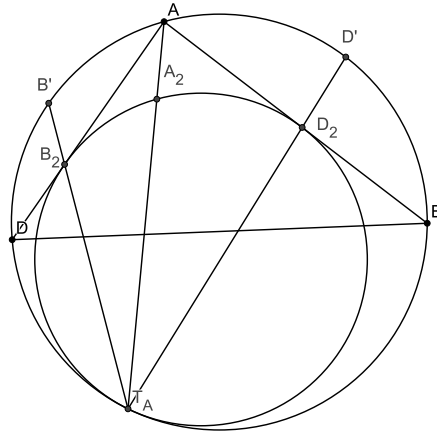


Рис. 2

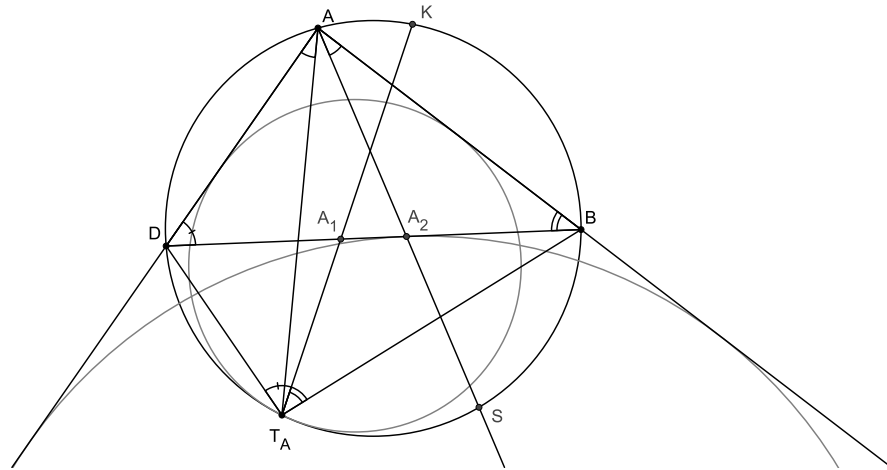


Рис. 3

$BD$ .  $A_1$  и  $A_2$  симметричны, т. к. точки Жергона и Нагеля изотомически сопряжены, а  $T_A$  и  $S$  – в силу композиции инверсии с центром в  $A$  и радиусом  $\sqrt{AD \cdot AB}$  и симметрии относительно биссектриссы  $\angle A$ , которая меняет местами точки  $A_2$  и  $T_A$ , что даёт изогональность направлений  $AA_2$  и  $AT_A$  относительно  $\angle A \Leftrightarrow$  точки  $T_A$  и  $S$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $BD$ .

Итак, если применить симметрии относительно серединного перпендикуляра к  $BD$ , то прямая  $SA_2$  перейдёт в прямую  $T_A A_1 \Rightarrow T_A A_1$  вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке, симметричной  $A$  относительно серединного перпендикуляра к  $BD \Rightarrow \angle DT_A A_1 = \angle ADB$  и  $\angle BT_A A_1 = \angle ABD$ .  $\square$

См. рис. 3.

**Лемма 3.** *Прямая, проходящая через вершину  $A$ , пересекает прямую  $BD$  и окружность  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Тогда точки  $T_A, A_1, E, F$  лежат на одной окружности.*

*Доказательство.* Пусть  $K$  – второе пересечение  $A_1 T_A$  с  $\Omega$ . Тогда по лемме 2  $\angle FT_A A_1 = \frac{1}{2}(\sphericalangle KD - \sphericalangle FD) = \frac{1}{2}(\sphericalangle BA - \sphericalangle FD) = \angle FEA_1$ .  $\Rightarrow$  Точки  $T_A, A_1, E, F$  лежат на одной окружности.  $\square$

См. рис. 4.

Прямая, проходящая через вершину  $A$ , пересекает сторону  $BD$  и окружность  $\Omega$  в точках  $X$  и  $C$ .  $\alpha_{AD}, \alpha_{AB}$  – окружности, вписанные в криволинейные треугольники  $DXA$  и  $AXB$ .  $J_{AD}, J_{AB}$  – их центры, а  $l$  – общая внешняя касательная, отличная от  $BD$ , которая пересекает  $\Omega$  в точках  $N$  и  $M$ .  $J$  – центр вписанной окружности треугольника  $NMC$ .

**Теорема 1** (Лемма Саваямы).  *$I$  лежит на одной прямой с точками касания  $\alpha_{AD}$  с прямыми  $XA$  и  $XD$ .*

**Теорема 2** (Теорема Тебо).  *$I, J, J_{AD}$  и  $J_{AB}$  лежат на одной прямой.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [Pro08].

**Лемма 4.** *Точки  $I, J, B, D$  лежат на одной окружности.*

*Доказательство.* Пусть  $AX \cap NM = Y$ ;  $X_1, X_2$  – точки касания  $\alpha_{AD}$  и  $\alpha_{AB}$  с прямой  $BD$ ;  $Y_1, Y_2$  – с прямой  $NM$ ;  $Z_1 Z_2$  – с прямой  $XY$ . Тогда по теореме 1:  $I = X_2 Z_2 \cap X_1 Z_1$ , а  $J = Y_2 Z_2 \cap Y_1 Z_1$ . При этом  $\angle Y_2 J Y_1 =$

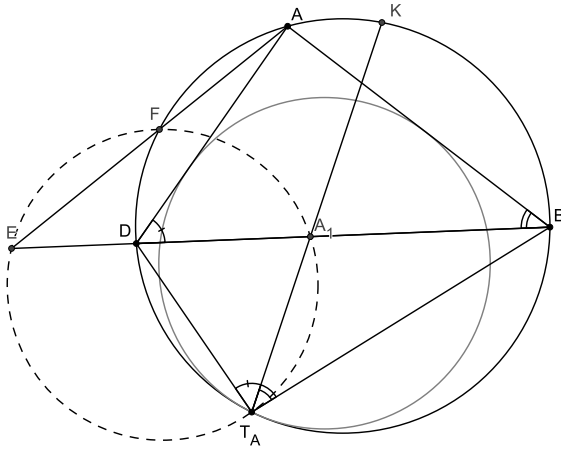


Рис. 4

$\angle X_2IX_1 = 90^\circ$ , а  $\angle Y_2JY_1 = \angle X_1JX_2$  в силу симметрии относительно  $J_{AD}J_{AB}$ .  $\Rightarrow \angle X_1JX_2 = \angle X_1IX_2$ .  $\Rightarrow$  точки  $I, J, B, D$  лежат на одной окружности.  $\square$

См. рис. 5

**Лемма 5.** Точки  $I, J, X, A_1$  лежат на одной окружности.

*Доказательство.*  $\angle JX_1X = \angle JY_1Y = \angle Y_1Z_1Y$ .  $\Rightarrow$  Точки  $J, Z_1, X, X_1, J_{AD}$  лежат на одной окружности.  $\Rightarrow \angle XJI = 90^\circ = \angle IA_1X$ .  $\Rightarrow$  Точки  $I, J, X, A_1$  лежат на одной окружности.  $\square$

См. рис. 6.

Следующие 2 факта общеизвестны и не требуют отдельного доказательства.

**Теорема 3** (О трёх центрах гомотетии). Пусть даны три окружности:  $S_1, S_2, S_3$ .  $G_{ij}$  – центр гомотетии с положительным коэффициентом окружностей  $S_i$  и  $S_j$ . Тогда  $G_{12}, G_{13}$  и  $G_{23}$  лежат на одной прямой.

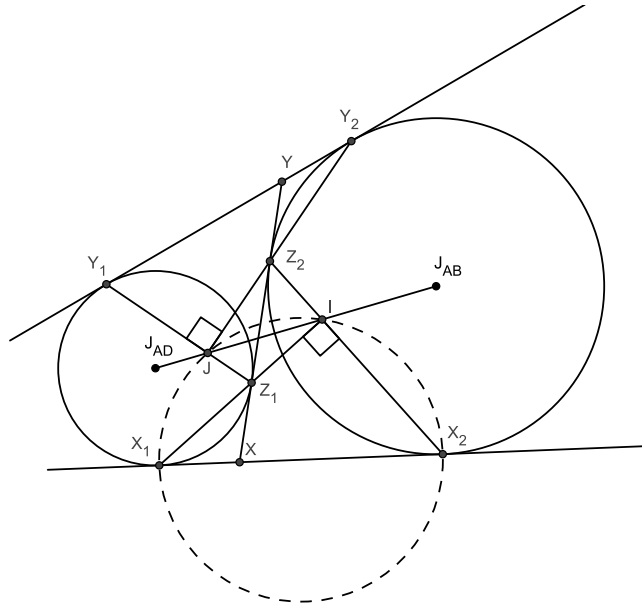


Рис. 5

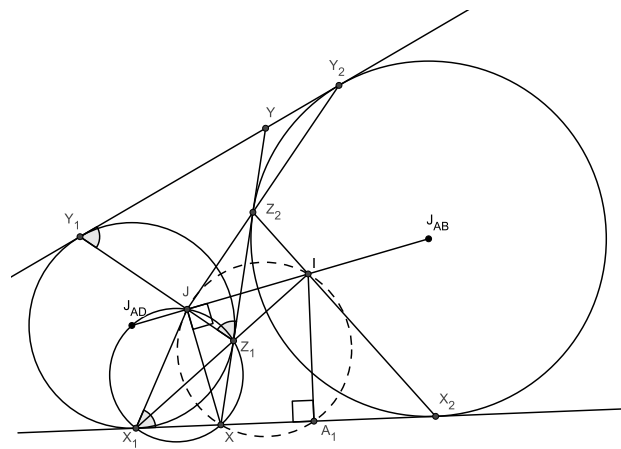


Рис. 6

**Лемма 6** (Признак описанного четырёхугольника). *Дан четырёхугольник  $ABCD$ ,  $F$  и  $E$  – точки пересечения продолжений его противоположных сторон. Тогда равносильны следующие утверждения:*

- $ABCD$  - описанный четырёхугольник
- $FA + EC = EA + FC$
- $FB + ED = EB + FD$

**Лемма 7.** *Дан четырёхугольник  $ABCD$ ,  $F$  и  $E$  – точки пересечения его противоположных сторон. Прямые проходящие через  $E$  и  $F$  делят  $ABCD$  на 4 четырёхугольника. Если в три из них можно вписать окружность, то можно и в четвёртый.*

*Доказательство.* Докажем для одного из случаев расположения точек и окружностей (изображен на рис. 7), для остальных доказывается аналогично. По лемме 6:  $EC + FC = EX + FX = EA + FA$ .  $\Rightarrow ABCD$  – описанный четырёхугольник.  $\Rightarrow FD + BE = DE + FB$ . При этом  $FB + EX = BE + FX$ .  $\Rightarrow FD + XE = DE + FX$ .  $\Rightarrow DD_1XC_1$  – описанный четырёхугольник.  $\square$

**Следствие 7.1.** *Дан четырёхугольник  $ABCD$ .  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  – точки на его сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно. Отрезки  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  разбивают его на четыре части. Если каждая из этих частей – описанный четырёхугольник, и прямые  $AB, CD, B_1D_1$  пересекаются в одной точке, то прямые  $AD, BC, A_1C_1$  пересекаются в одной точке.*

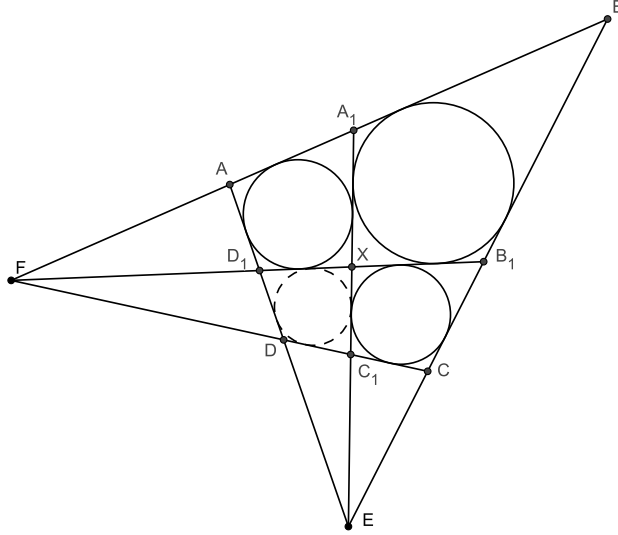


Рис. 7

## 2 Доказательство основной теоремы

*Доказательство.* Пусть  $J_{AD}$ ,  $J_{AB}$  – центры  $\alpha_{AD}$  и  $\alpha_{AB}$ , а  $I_{BC}$ ,  $I_{CD}$  – центры  $\omega_{BC}$ ,  $\omega_{CD}$ . Точки  $B'$ ,  $D'$ ,  $T_A$ ,  $A_1$ ,  $I$  и  $J$  определим так же, как в разделе 1.2.

Докажем сначала, что центр гомотетии с положительным коэффициентом  $\omega_{CD}$  и  $\omega_{BC}$  совпадает с центром положительной гомотетии  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{AD}$ . Это равносильно тому, что прямые  $J_{AD}J_{AB}$ ,  $I_{BC}I_{CD}$  и  $BC$  пересекаются в одной точке, т. к.  $BC$  – общая касательная к  $\omega_{CD}$ ,  $\omega_{BC}$  и  $\alpha_{AD}$ ,  $\alpha_{AB}$ . Пусть  $I_{BC}I_{CD} \cap BD = P_1$ , а  $J_{AB}J_{AD} \cap BD = P_2$ ; второе пересечение  $AP_2$  с  $\Omega$  – точка  $F$ ,  $CP_1 = T_1$ ,  $CP_2 = T_2$ ;  $I_{BC}I_{CD} \cap AC = G$ .

Тогда  $G$  – центр гомотетии с отрицательным коэффициентом окружностей  $\omega_{CD}$  и  $\omega_{BC}$ .  $\Rightarrow (P_1, G; I_{CD}, I_{BC}) = -1$ . Спроецируем прямую  $P_1G$  на окружность  $\Omega$  через точку  $C$ , тогда  $G \rightarrow A$ ,  $I_{CD} \rightarrow B'$ ,  $I_{BC} \rightarrow D'$ , а  $P_1 \rightarrow T_1$ .  $\Rightarrow T_1B'AD'$  – гармонический четырёхугольник.  $\Rightarrow$  По лемме 1:  $T_1 = T_A$ . См. рис. 8

Теперь сделаем инверсию с центром в  $P_2$ , которая переводит  $\Omega$  в себя. Она  $A \leftrightarrow F$ ,  $C \leftrightarrow T_2$ ,  $B \leftrightarrow D$ , а значит окружность  $IJB'D$  переходит в



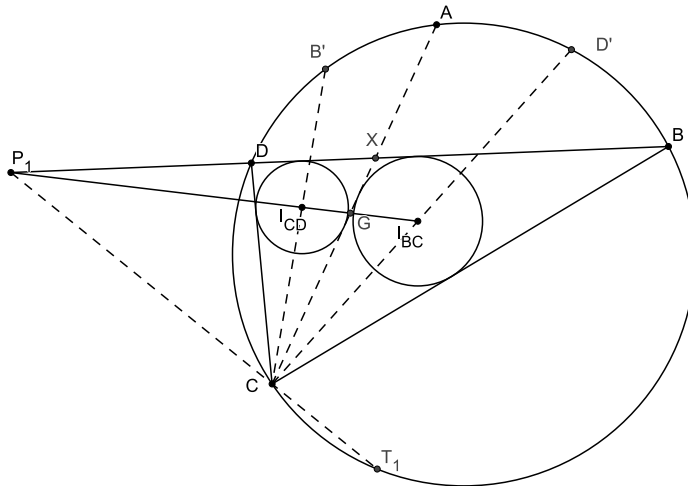


Рис. 8

себя(она существует по лемме 4), т. к. по теореме 2 точки  $I, J, P_2$  лежат на одной прямой, т. е.  $I \leftrightarrow J \Rightarrow$  Окружность  $A_1XIJ$  переходит в себя(она существует по лемме 5), т. е.  $A_1 \leftrightarrow X \Rightarrow$  прямая  $AC \leftrightarrow$  окружность  $FA_1T_2 \Rightarrow$  Точки  $P_2, F, A_1, T_2$  лежат на одной окружности.  $\Rightarrow$  По лемме 3:  $T_2 = T_A$ . См. рис. 9

Итак,  $T_1 = T_A = T_2$ , т. е.  $P_1 = T_A C \cap BD = P_2$ , а значит  $J_{AD}J_{AB}, I_{BC}I_{CD}$  и  $BC$  пересекаются в одной точке. Первая часть утверждения доказана.

Вторая часть равносильна тому, что  $I_{CD}J_{AD}, I_{BC}J_{AB}$  и  $AC$  пересекаются в одной точке, что следует из первой части основной теоремы и следствия леммы 7.

□

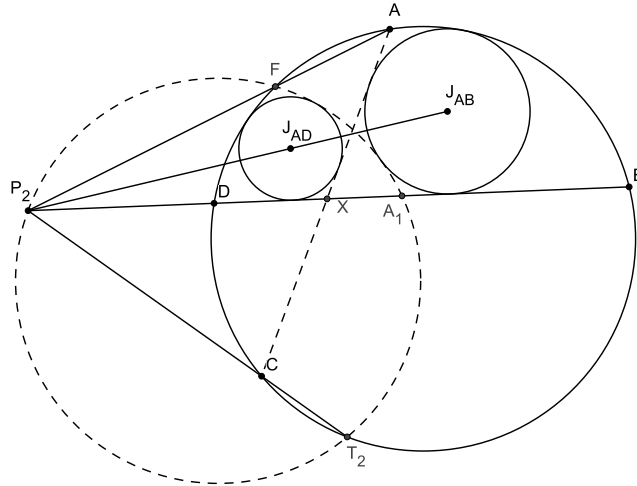


Рис. 9

## Список литературы

- [Pro08] *Протасов В.Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха  
 // Квант. 2008. №4. С. 10-15.