О центрах гомотетий вписанных окружностей и окружностей Тебо

Львов Алексей

1 Формулировка основной теоремы

Основная теорема. *Пусть $ABCD$ – вписанный в окружность Ω четырёхугльник. $AC \cap BD = X$. ω_{CD}, ω_{BC} – вписанные окружности треугольников XCD и XBC соответственно, α_{AD}, α_{AB} – окружности, вписанные в криволинейные треугольники DXA и AXB, а T_A – точка касания Ω с полувписанной окружностью треугольника ABD, соответствующей вершине A.*

Тогда

(1) $P = BD \cap T_AC$ – это центр гомотетии ω_{CD} и ω_{BC};

(2) $P = BD \cap T_AC$ – это центр гомотетии α_{AB} и α_{AD};

(3) Центры гомотетии ω_{CD} и ω_{BC}, α_{AB} и α_{AD} совпадают;

(4) Центры гомотетии ω_{CD} и α_{AD}, ω_{BC} и α_{AB} совпадают.

В данном случае окружность вписанная в криволинейный трегуольник XYZ, где XY и YZ – отрезки, а XZ – дуга окружности Ω, – это окружность, касающаяся отрезков XY, YZ и дуги XZ.

См. рис. 1

2 Вспомогательные леммы

Почти все используемые леммы общеизвестны, их доказательства приведены для целостности работы.

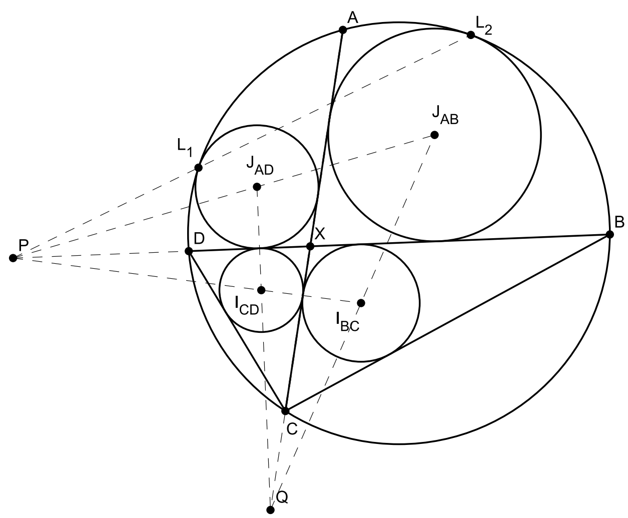

Рис. 1

Введём некоторые обознчения:
Дан треугольник ABD. Ω – его описанная окружность. T_A – точка касания Ω с его полувписанной окружностью, соответствующей вершине A. I – центр вписанной окружности треугольника ABD. B', D' – середины дуг AD и BA окружности Ω. A_1 – точка касания вписанной окружности со стороной BD.

Лемма 1. *$T_AB'AD'$ – гармонический четырёхуглньник.*

Доказательство. Пусть B_2, D_2 – точки касания полувписанной окружности со стронами AD и AB; A_2 – вторая точка пересечения AT_A с полувписанной окружностью.

Тогда точки T_A, B_2, B' и T_A, D_2, D' лежат на одной прямой по лемме Архимеда. Четрырёхугольник $T_AB_2A_2D_2$ гармонический, т. к. касательные в точках B_2 и D_2 пересекаются на диагонали A_2T_A. Четрырёхугольники $T_AB_2A_2D_2$ и $T_AB'AD'$ гомотетичны. $\Rightarrow$ $T_AB'AD'$ тоже является гармоническим. □

См. рис. 2.

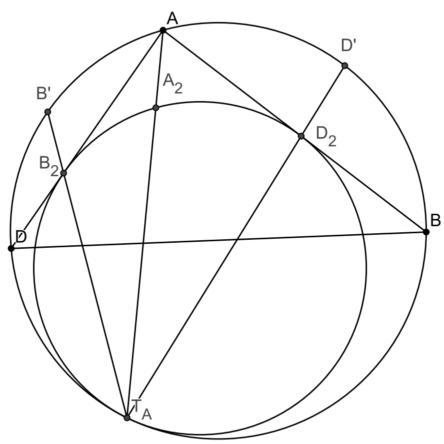

Рис. 2

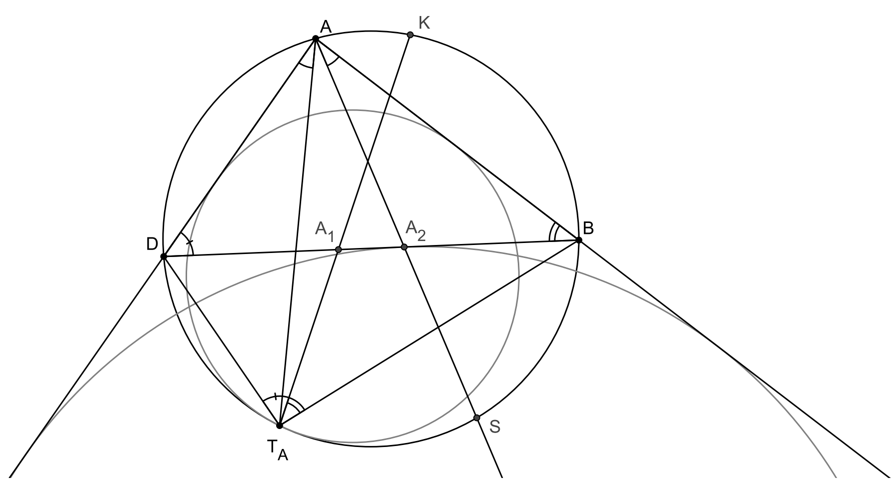

Рис. 3

Лемма 2. *$\angle DT_AA_1 = \angle ADB$ и $\angle BT_AA_1 = \angle ABD$.*

Доказательство. Пусть A_2 – точка касания вневписанной окружности Ω_A треугольника ABD, соответствующей вершине A, со стороной BD, а S – вторая точка пересечения AA_2 с Ω. Тогда пары точек точек A_1, A_2 и T_A, S симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD. A_1 и A_2 симметричны, т. к. точки Жергона и Нагеля изотомически сопряжены, а T_A и S – в силу композиции инверсии с центром в A и радиусом $\sqrt{AD \cdot AB}$ и симметрии относительно биссектриссы $\angle A$, которая меняет местами точки A_2 и T_A, что даёт изогональность направлений AA_2 и AT_A относительно $\angle A \Leftrightarrow$ точки T_A и S симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD.

Итак, если применить симметрии относительно серединного перпендикуляра к BD, то прямая SA_2 перейдёт в прямую $T_AA_1 \Rightarrow T_AA_1$ вторично пересекает окружность Ω в точке, симметричной A относительно серединного перпендикуляра к $BD \Rightarrow \angle DT_AA_1 = \angle ADB$ и $\angle BT_AA_1 = \angle ABD$. □

См. рис. 3.

Лемма 3. *Прямая, проходящая через вершину A, пересекает прямую BD и окружность Ω в точках E и F. Тогда точки T_A, A_1, E, F лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть K – второе пересечение A_1T_A с Ω. Тогда по лемме 2 $\angle FT_AA_1 = \frac{1}{2}(\smile KD - \smile FD) = \frac{1}{2}(\smile BA - \smile FD) = \angle FEA_1$. $\Rightarrow$ Точки T_A, A_1, E, F лежат на одной окружности. □

См. рис. 4.

Прямая, проходящая через вершину A, пересекает сторону BD и окружность Ω в точках X и C. α_{AD}, α_{AB} – окружности, вписанные в криволинейные треугольники DXA и AXB. J_{AD}, J_{AB} – их центры, а l – общая внешняя касательная, отличная от BD, которая пересекает Ω в точках N и M. J – центр вписанной окружности треугольника NMC.

Теорема 1 (Лемма Саваямы)**.** *I лежит на одной прямой с точками касания α_{AD} с прямыми XA и XD.*

Теорема 2 (Теорема Тебо)**.** *I, J, J_{AD} и J_{AB} лежат на одной прямой.*

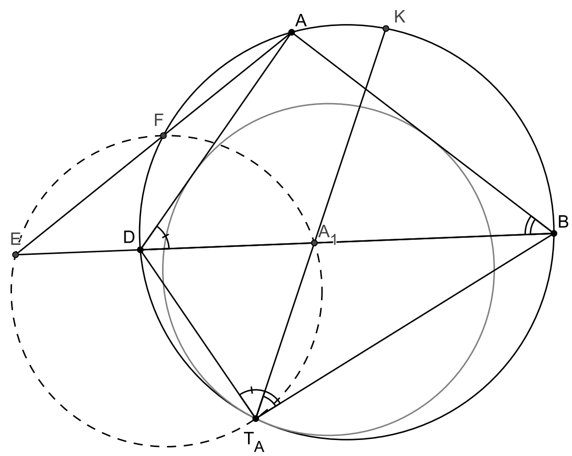

Рис. 4

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [Pro08].

Лемма 4. *Точки I, J, B, D лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть $AX \cap NM = Y$; X_1, X_2 – точки касания α_{AD} и α_{AB} с прямой BD; Y_1, Y_2 – с прямой NM; $Z_1 Z_2$ – с прямой XY. Тогда по теореме 1: $I = X_2 Z_2 \cap X_1 Z_1$, а $J = Y_2 Z_2 \cap Y_1 Z_1$. При этом $\angle Y_2 J Y_1 = \angle X_2 I X_1 = 90°$, а $\angle Y_2 J Y_1 = \angle X_1 J X_2$ в силу симметрии относительно $J_{AD} J_{AB}$. $\Rightarrow \angle X_1 J X_2 = \angle X_1 I X_2$. $\Rightarrow$ точки I, J, B, D лежат на одной окружности. □

См. рис. 5

Лемма 5. *Точки I, J, X, A_1 лежат на одной окружности.*

Доказательство. $\angle J X_1 X = \angle J Y_1 Y = \angle Y_1 Z_1 Y$. $\Rightarrow$ Точки J, Z_1, X, X_1, J_{AD} лежат на одной окружности. $\Rightarrow \angle XJI = 90° = \angle I A_1 X$. $\Rightarrow$ Точки I, J, X, A_1 лежат на одной окружности. □

См. рис. 6.

Следующие 2 факта общеизвестны и не требуют отдельного доказательства.

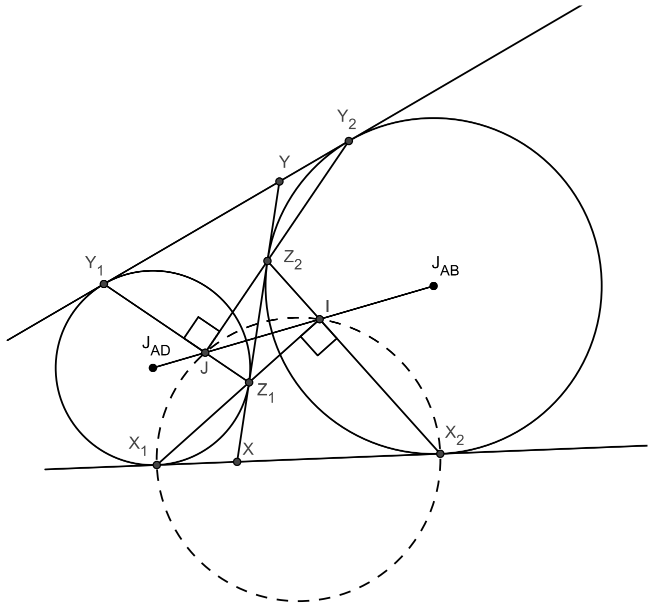

Рис. 5

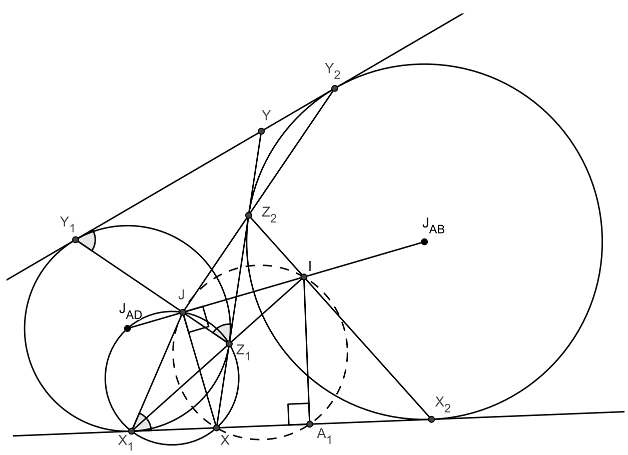

Рис. 6

Теорема 3 (О трёх центрах гомотетии). *Пусть даны три окружности: S_1, S_2, S_3. G_{ij} – центр гомотетии с положительным коэффицентом окружностей S_i и S_j. Тогда G_{12}, G_{13} и G_{23} лежат на одной прямой.*

Лемма 6 (Признак описанного четырёхугольника). *Дан четырёхугльник $ABCD$, F и E – точки пересечения продолжений его противополжных сторон. Тогда равносильны следующие утверждения:*

- *$ABCD$ - описанный четырёхуглькик*
- $FA + EC = EA + FC$
- $FB + ED = EB + FD$

Лемма 7. *Дан четырёхугльник $ABCD$, F и E – точки пересечения его противополжных сторон. Прямые проходящие через E и F разделяют $ABCD$ на 4 четырёхугльника. Если в три из них можно вписать окружность, то можно и в четвёртый.*

Доказательство. Докажем для одного из случаев расположения точек и окружностей(изображен на рис. 7), для остальных доказывается аналогичнло. По лемме 6: $EC + FC = EX + FX = EA + FA$. $\Rightarrow ABCD$ – описанный четырёхугольник. $\Rightarrow FD + BE = DE + FB$. При этом $FB + EX = BE + FX$. $\Rightarrow FD + XE = DE + FX$. $\Rightarrow DD_1XC_1$ – описанный четырёхугльник. □

Следствие 7.1. *Дан четырёхугльник $ABCD$. A_1, B_1, C_1 и D_1 – точки на его стронах AB, BC, CD и DA соответственно. Отрезки A_1C_1 и B_1D_1 разбивают его на четыре части. Если каждая из этих частей – описанный четырёхугльник, и прямые AB, CD, B_1D_1 пересекаются в одной точке, то прямые AD, BC, A_1C_1 пересекаются в одной точке.*

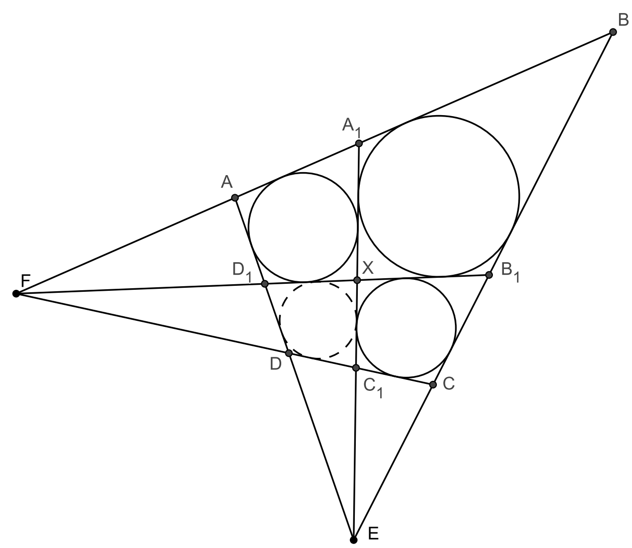

Рис. 7

3 Доказательство основной теоремы

Доказательство. Пусть J_{AD}, J_{AB} – центры α_{AD} и α_{AB}, а I_{BC}, I_{CD} – центры ω_{BC}, ω_{CD}. Точки B', D', T_A, A_1, I и J определим так же, как в разделе 2.

Докажем сначала (1) и (2). Это равносильно тому, что прямые T_AC, $J_{AD}J_{AB}$, $I_{BC}I_{CD}$ и BD пересекаются в одной точке, т. к. BD – общая касательная к ω_{CD}, ω_{BC} и α_{AD}, α_{AB}.

(1): Пусть $I_{BC}I_{CD} \cap BD = P$ (P – центр гомотетии ω_{CD} и ω_{BC}), $I_{BC}I_{CD} \cap AC = G$, а T_1 – второе пересечение CP с Ω. Тогда G - центр гомотетии с отрицательным коэффицентом окружностей ω_{CD} и ω_{BC}. $\Rightarrow$ $(P, G; I_{CD}, I_{BC}) = -1$. Спроецируем прямую PG на окружность Ω через точку C, тогда $G \to A$, $I_{CD} \to B'$, $I_{BC} \to D'$, а $P \to T_1$. $\Rightarrow$ $T_1B'AD'$ – гармонический четырёхуглльник. $\Rightarrow$ По лемме 1: $T_1 = T_A$. См. рис. 8

(2): Пусть $J_{AB}J_{AD} \cap BD = P$ (P – центр гомотетии α_{AB} и α_{AD}), а F, T_2 – вторые пересечения AP и CP с Ω. Сделаем инверсию с центром в P, которая переводит Ω в себя. Такая инверсия поменяет местами пары точек: $A \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow T_2$, $B \leftrightarrow D$ $\Rightarrow$ окружность $IJBD$ перейдёт в

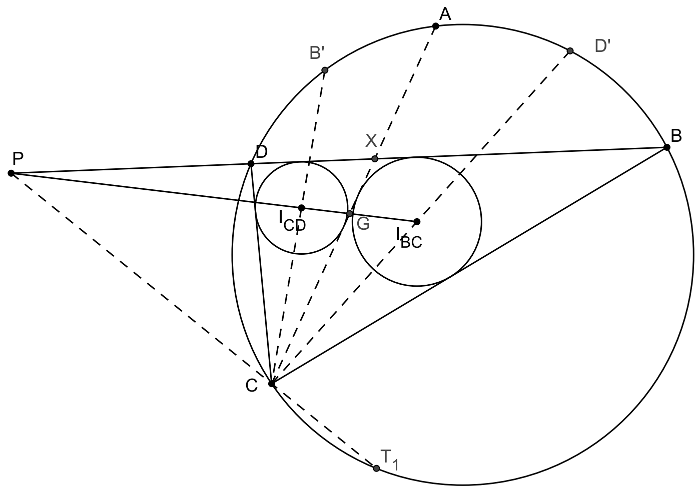

Рис. 8

себя (она существует по лемме 4). По теореме 2 точки I, J, P лежат на одной прямой $\Rightarrow$ инверсия поменяет местами точки I и J $\Rightarrow$ окружность $IJXA_1$ перейдёт в себя (она существует по лемме 5) $\Rightarrow$ инверсия поменяет местами точки X и A_1. См. рис. 9

Имеем: $A \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow T_2$ и $X \leftrightarrow A_1 \Rightarrow$ прямая AC перейдёт окружность $FA_1T_2 \Rightarrow$ точки P, F, A_1, T_2 лежат на одной окружности $\Rightarrow$ по лемме 3: $T_2 = T_A$. См. рис. 10

Итак, $P = BD \cap T_AC$ – это центр гомотетии ω_{CD} и ω_{BC}, а также центр гомотетии α_{AB} и α_{AD}, что доказывает (3).

Утверждение (4) равносильно тому, что $I_{CD}J_{AD}$, $I_{BC}J_{AB}$ и AC пересекаются в одной точке, что следует из (3) и следствия леммы 7.

$\square$

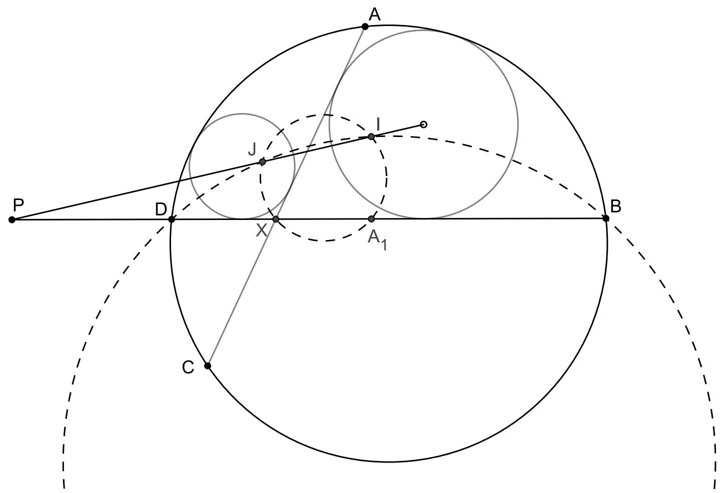

Рис. 9

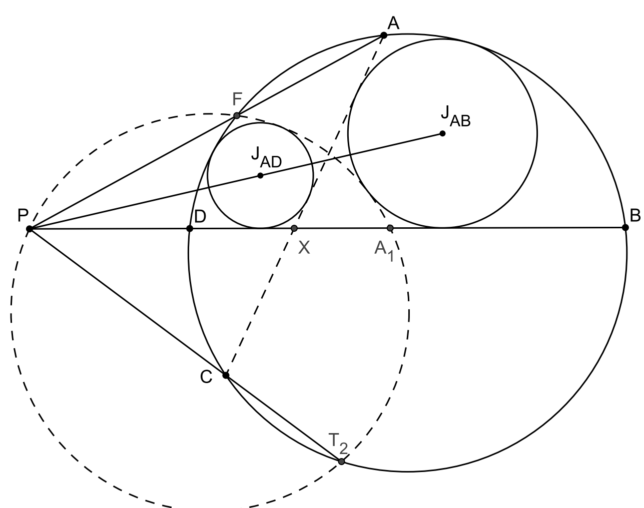

Рис. 10

Список литературы

[Pro08] *Протасов В.Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха // Квант. 2008. №4. С. 10-15.