Представление тригонометрической функции в комплексных радикалах

Попова Елизавета 11 класс

Известно, что существуют алгебраические уравнения, например, 3-й степени, неразрешимые в вещественных радикалах (я не привожу строгого определения разрешимости в радикалах, оно есть в [1]).

Некоторые из этих уравнений становятся разрешимыми, если добавить к допустимым функциям $f(t) = cos\left(\frac{1}{n}arccost\right)$ для любого натурального n. Такие уравнения можно решить при помощи тригонометрического метода.

Для уравнений 3-й степени он заключается в сведении уравнения

$$x^3 + qx + p = 0$$

к уравнению

$$4y^3 - 3y = a$$

и применении тригонометрической формулы $\cos 3x = 4cos^3x - 3cosx$.

Это приводит к решению

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(-q\sqrt{\frac{27}{4p^3}}\right) \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

Возникает предположение о возможности решения подобным образом уравнения степеней, больших 3, то есть представления их корней с использованием операций +,-,×,:,$\sqrt[n]{}$ и

$f(t) = cos\left(\frac{1}{n}arccost\right)$ для любого натурального n, применяемых к 1 и коэффициентам данного уравнения.

Некоторые уравнения действительно так решаются, например $16x^5 - 20x^3 + 5x = a$, так как $16x^5 - 20x^3 + 5x$ - многочлен Чебышева.

Однако известно, не все уравнения 5-й степени и выше разрешимы в комплексных радикалах.

Например, ясно, что уравнение

$$x^5 - a = 0$$

разрешимо в комплексных радикалах, но не любое уравнение 5-й степени к нему “сводится”.

Однако, известно, что уравнение

$$x^5 + x + a = 0,$$

к которому “сводится” любое уравнение 5-й степени, не разрешимо в комплексных радикалах (т.е. не “сводится” к уравнениям вида $y^k - b = 0$).

Из этого следует, что тригонометрического решения для произвольных уравнений степени 5 и выше не существует, так как не все их корни представимы в комплексных радикалах, а функция $\cos\left(\frac{1}{n} arccos t\right)$ представима в них для любого целого n:

$$\cos\left(\frac{1}{n} arccos t\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{t + i\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{t + i\sqrt{1-t^2}}}\right).$$

Из представимости функции $\cos\left(\frac{1}{n} arccos t\right)$ в комплексных радикалах следует также то, что уравнение $T_n(x) = t$, где T_n – многочлен Чебышева, разрешимо в комплексных радикалах.

Мы не будем ни явно придавать смысл этой формуле, ни давать общего определения представимости в комплексных радикалах и тригонометрических функциях, оно есть в[1]. Предыдущие неформальные обсуждения формализуются следующей теоремой.

Теорема

Для любых $t \in [-1; 1]$ и целого положительного n существуют $f_1, f_2 \in C$ такие, что

$$\begin{cases} f_1^2 = 1 - t^2 \\ f_2^n = t + i f_1 \\ \cos\left(\frac{1}{n} arccos t\right) = \frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1}) \end{cases}$$

Доказательство:

Обозначим $\varphi \coloneqq arccos t.$

Докажем, что числа $f_1 = \sin\varphi$ и $f_2 = cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n}$ удовлетворяют этой системе.

Имеем

$f_1^2 + t^2 = sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$.

По формуле Муавра,

$f_2^n = \left(cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n}\right)^n = cos\left(\frac{\varphi}{n}\cdot n\right) + isin\left(\frac{\varphi}{n}\cdot n\right) = cos\varphi + isin\varphi = t + if_1.$

$$\frac{1}{2}(f_2 + f_2^{-1}) = \frac{1}{2}\left(cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n} + \frac{1}{cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n}}\right) = \frac{1}{2}\left(cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n} + \frac{cos\frac{\varphi}{n} - isin\frac{\varphi}{n}}{cos^2\frac{\varphi}{n} + sin^2\frac{\varphi}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n} + cos\frac{\varphi}{n} - isin\frac{\varphi}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(2cos\frac{\varphi}{n}\right) = cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{1}{n}arccost\right)$$

QED

Литература

[1] “Элементы математики в задачах” под редакцией А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова

Благодарности

Научный руководитель – А. Б. Скопенков