Романов Игнат

О нетранзитивных костях

Определения

1) **Кубик** - конечный набор целых чисел $(a_1, a_2 \dots\ a_n)$, такой, что n$\geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$.

2) Если даны два кубика A= $(a_1, a_2 \dots\ a_n)$ и B =$(b_1, b_2 \dots\ b_n)$ тогда для любого i$\in \{1 \dots n\}$

$\boldsymbol{w_i}$**(A,B)**:=$|\{j \in \{1 \dots n\}: b_j < a_i\}|$

3) Если даны два кубика A= $(a_1, a_2 \dots\ a_n)$ и B =$(b_1, b_2 \dots\ b_n)$ тогда для любого i$\in \{1 \dots n\}$

w(A,B):=$\sum_{i=1}^{n} w_i\ (A, B)$

Теорема 1

Для любых натуральных n и K таких, что n≥3 и K≤n, в X(n, K) – множестве кубиков из n элементов, и суммой всех элементов равной K, существует кубик А такой, что для любого другого кубика В из X(n, K) w(A,B)≥w(B,A).

Теорема 2 Для любых натуральных n и K таких, что n≥3 и K ≥n^2-n , в X(n, K) – множестве кубиков из n элементов, и суммой всех элементов равной K, существует кубик А такой, что для любого другого кубика В из X(n, K) w(A,B)≥w(B,A).

Доказательство Теоремы 1

Рассмотрим кубик L в котором K элементов равны 1 и n-K равны 0. Докажем, что он и есть искомый кубик.

Возьмем любой другой кубик H из того же множества, пусть в нем x элементов больших единицы, y элементов равных 1 и n-x-y элементов равных 0.

Заметим что 2x+y≤K поскольку значение каждого из x элементов, больших единицы, хотя бы 2.

Значит x $\leq \frac{\text{K}-\text{y}}{2}$

Тогда заметим, что:

n $\geq \frac{n+K}{2}$ => n(K-y) $\geq \frac{\text{K}-\text{y}}{2}$(n+K) => n(K-y) $\geq$ x(n+K) (поскольку x $\leq \frac{\text{K}-\text{y}}{2}$) , значит

Kn-yn $\geq$ xn+Kx => Kn-Kx $\geq$ xn+yn => Kn-Kx-Ky $\geq$ xn+yn-Ky => K(n-x-y)$\geq$ xn+y(n-K) , но теперь заметим что K(n-x-y) = w(L,H), а xn+y(n-K) = w(H,L) => w(L,H) $\geq$ w(H,L). Ч.и.т.д.

Доказательство Теоремы 2

Для заданного кубика A $(a_1 \dots a_n)$ рассмотрим кубик A' $(a'_1 \dots a'_n)$ такой что $\forall\ i \in \ \{1 \dots n\}\ a_i + a'_i$=n. Назовем такой кубик обратным к A. Тогда, рассмотрим множество кубиков из n элементов и суммой элементов j, где j≤ n. К каждому кубику из этого множества построим обратный. При этом заметим, что все полученные кубики имеют одинаковую сумму элементов ($n^2 - j$) и различны. Кроме того мы получили все возможные кубики с этой суммой (поскольку мы можем проделать операцию построения обратного в другую сторону и получить кубик из исходного множества, к которому мы строили обратный) то есть построив обратные кубики для всех кубиков из множества с суммой j мы получили множество кубиков с суммой ($n^2 - j$).

Далее заметим, что если для некоторых двух кубиков A и B w(A,B)≥w(B,A) то w(A',B')≤w(B',A'), поскольку w_i(A,B)=|$\{j \in \{1 \dots n\}$:$b'_j > a'_i\}$| т.е. для каждого элемента кубика A' мы подсчитываем скольких элементов кубика B' он меньше, а это подсчет w(B',A') другим способом.

Значит если в X(n,k) – множестве кубиков из n элементов с суммой K найдется кубик Z такой, что для любого другого кубика D из этого множества верно, что w(Z,D)<w(D,Z), тогда в X(n,$n^2 - k$) существует такой кубик P, что для любого другого кубика C из этого множества w(P,C)>w(C,P), и ясно, что P это Z'.

Теперь покажем что для любых натуральных n и K таких, что n≥3 и K≤n, в X(n, K) – множестве кубиков из n элементов, и суммой всех элементов равной K, существует кубик A такой, что для любого другого кубика B из X(n, K) w(A,B)<w(B,A).

Рассмотрим кубик U в котором один элемент равен K, а все остальные нулю. И любой другой кубик G из этого множества. Заметим что w(U,G)≤n, а w(G,U)≥2(n-1) т.к. в G есть хотя бы два ненулевых элемента. А 2(n-1)-n = n-2 что больше нуля при n≥3, а значит при таких n и 2(n-1) > n и w(G,U) > w (U,G). Ч.и.т.д.

Гипотеза 1

Для любых натуральных n и K таких, что n≥3 и нечетное, а K = n+1, в X(n, K) – множестве кубиков из n элементов, и суммой всех элементов равной K, для любого кубика A найдется кубик B ,отличный от A, такой, что w(A,B)<w(B,A).