ГБОУ Школа им. Маршала В.И.Чуйкова на Юго-Востоке
Выполнил ученик 9 С класса Сивков Савелий
Научный руководитель Абрамов Ярослав Владимирович

Теорема. *Пусть $p > 2$, где p - простое число. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (1) с коэффициентами a, b и c (a не кратно p) из $\mathbb{Z}_p$ имеет решение тогда и только тогда, когда дискриминант $D = b^2 - 4ac$ является точным квадратом в $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство Предположим, что уравнение (1) имеет корень x.

Так как $ax^2 + bx + c = 0$, то $c = -ax^2 - bx$. Подставив значение c в значение дискриминанта, получим

$$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4a(-ax^2 - bx) = b^2 + 4a^2x^2 + 4abx = (b + 2ax)^2,$$

т.е. дискриминант D является точным квадратом. ЧТД.

Пусть существует u из $\mathbb{Z}_p$ такое, что $u^2 = D$. Докажем, что $x = \frac{-b \pm u}{2a}$ является корнем уравнения (1).

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}(2).$$

Подставив значение x в последнюю часть выражения (2), получим

$$a\left(\frac{-b \pm u}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \cdot \left(\frac{\pm u}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{u^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{D - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{(b^2 - 4ac) - (b^2 - 4ac)}{4a} = 0.$$

ЧТД.