

Теорема: Число $(n-1)!+1$ является точной степенью числа n только при $n=2,3$ и 5

Дмитрий Скворцов, Школа "Летово", 9 класс

Лемма. Для всех составных d , кроме 4, число $(d-1)!$ делится на d .

Доказательство леммы:

Есть три случая для возможных значений составных d , а именно, когда d представляется в виде произведения хотя бы двух простых чисел в неких степенях, когда это степень некоего простого числа, большая 3, и когда это квадрат простого числа.

Запишем каноническое разложение на простые множители числа n :

$$d = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

Случай 1. k больше 1 (когда d представляется в виде произведения хотя бы двух простых чисел в неких степенях). Тогда:

$$p_1^{\alpha_1} \neq \frac{d}{p_1^{\alpha_1}}$$

Так как одно из этих чисел делится на p_1 , а другое нет, они не равны. Также очевидно, что оба этих числа меньше, чем d . Значит, они содержатся среди чисел от 1 до $d-1$.

$$(d-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (d-1) : p_1^{\alpha_1} \cdot \frac{d}{p_1^{\alpha_1}} = d$$

Случай 2. $k=1$, $\alpha_1 \geq 3$ (то есть, когда n является точной степенью простого числа, большей 2). Тогда:

$$d = p_1^{\alpha_1} = p_1 \cdot p_1^{\alpha_1-1}$$

Заметим, что:

$$p_1 \neq p_1^{\alpha_1-1}$$

Так как:

$$p_1^{\alpha_1-1} \geq p_1^{3-1} = p_1^2 > p_1$$

Очевидно, что оба эти числа меньше, чем d . Значит, они содержатся среди чисел от 1 до $d-1$.

$$(d-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_1^{\alpha_1-1} \cdot \dots \cdot (d-1) : p_1 \cdot p_1^{\alpha_1-1} = p_1^{\alpha_1} = d$$

Случай 3. $k=1$, $\alpha_1=2$ (то есть, когда n является квадратом простого числа). Тогда:

$$d = p_1^2$$

Заметим, что:

$$p_1 > 2 \Leftrightarrow 2p_1 < p_1^2 \Leftrightarrow 2p_1 < d = p_1^2$$

Тогда для всех простых чисел, больших 2, среди чисел от 1 до $n-1$ содержатся числа p и $2p$.

А если $p=2$, то $d=4$, но d не равно 4. Получаем:

$$(d-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p_1 \cdot \dots \cdot 2p_1 \cdot \dots \cdot (d-1) \div p_1 \cdot p_1 = p_1^2 = d$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы:

1. Пусть n равно 2, 3 или 5. Для них утверждение очевидно.

2. Пусть n не равно 2, 3 и 5.

$(n-1)!+1$ не делится на n для составных n . Значит n – простое число.

$$(n-1)!+1 = n^r,$$

где r – натуральная степень числа n .

$$(n-1)! = n^r - 1$$

Разделим обе части равенства на $n-1$.

$$(n-2)! = \sum_{i=0}^{r-1} n^i$$

Заметим, что $n-1$ является составным числом, не равным 4 для всех простых n , больших 5, так как в этом случае n нечетное и $n-1$ четное, большее 4, то есть составное. Тогда по данной лемме:

$$(n-2)! \div (n-1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{r-1} n^i \div (n-1)$$

Положим, что:

$$P(n) = \sum_{i=0}^{r-1} n^i$$

По теореме Безу,

$$P(n) = (n-1)Q(n) + P(1)$$

Заметим, что $Q(n)$ является многочленом с целыми коэффициентами, так как при делении многочлена на приведенный одночлен получаем многочлен с целыми коэффициентами. Значит, для любых n , $Q(n)$ – целое число.

Значит:

$$P(1) \dot{=} (n-1)$$

Заметим, что:

$$P(1) = \sum_{i=0}^{r-1} 1^i = r$$

Тогда:

$$r \dot{=} (n-1) \Rightarrow r \geq n-1$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (n-1)^{n-1} &\geq (n-1)! = n^r - 1 \geq n^{n-1} - 1 = ((n-1)+1)^{n-1} - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (n-1)^i - 1 \geq \\ &\geq (n-1)^{n-1} + (n-1) \cdot (n-1)^{n-2} - 1 = 2(n-1)^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Первое неравенство верно, так как каждый множитель слева больше либо равен каждому множителю справа, причем обе части неравенства – это произведения $n-1$ чисел.

Тогда:

$$(n-1)^{n-1} \geq 2(n-1)^{n-1} - 1 \Rightarrow (n-1)^{n-1} \leq 1$$

Очевидно, что последнее неравенство неверно для $n \geq 2$, что является противоречием.

Теорема доказана.

Автор выражает признательность А. Б. Скопенкову и А. А. Заславскому за ценные комментарии, полученные при работе над задачей.