Теорема: Число (n-1)!+1 является точной степенью числа n только при n=2,3 и 5

Дмитрий Скворцов, Школа “Летово”, 9 класс

Лемма. Для всех составных d, кроме 4, число (d-1)! делится на d.

Доказательство леммы:

Есть три случая для возможных значений составных d, а именно, когда d представляется в виде произведения хотя бы двух простых чисел в неких степенях, когда это степень некоего простого числа, большая 3, и когда это квадрат простого числа.

Запишем каноническое разложение на простые множители числа n:

$$d=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Случай 1. k больше 1 (когда d представляется в виде произведения хотя бы двух простых чисел в неких степенях). Тогда:

$$p_1^{\alpha_1} \neq \frac{d}{p_1^{\alpha_1}}$$

Так как одно из этих чисел делится на p_1, а другое нет, они не равны. Также очевидно, что оба этих числа меньше, чем d. Значит, они содержатся среди чисел от 1 до d-1.

$$(d-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(d-1) \vdots p_1^{\alpha_1}\cdot\frac{d}{p_1^{\alpha_1}}=d$$

Случай 2. k=1, $\alpha_1 \geq 3$ (то есть, когда n является точной степенью простого числа, большей 2). Тогда:

$$d=p_1^{\alpha_1}=p_1\cdot p_1^{\alpha_1-1}$$

Заметим, что:

$$p_1 \neq p_1^{\alpha_1-1}.$$

Так как:

$$p_1^{\alpha_1-1} \geq p_1^{3-1}=p_1^2>p_1$$

Очевидно, что оба эти числа меньше, чем d. Значит, они содержатся среди чисел от 1 до d-1.

$$(d-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots p_1\cdot\ldots\cdot p_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot(d-1) \vdots p_1\cdot p_1^{\alpha_1-1}=p_1^{\alpha_1}=d$$

Случай 3. k=1, α_1=2 (то есть, когда n является квадратом простого числа). Тогда:

$$d = p_1^2$$

Заметим, что:

$$p_1 > 2 \Leftrightarrow 2p_1 < p_1^2 \Leftrightarrow 2p_1 < d = p_1^2$$

Тогда для всех простых чисел, больших 2, среди чисел от 1 до n-1 содержатся числа p и 2p.

А если p=2, то d=4, но d не равно 4. Получаем:

$$(d-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots p_1 \cdot \ldots \cdot 2p_1 \cdot \ldots \cdot (d-1) \vdots p_1 \cdot p_1 = p_1^2 = d$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы:

1. Пусть n равно 2, 3 или 5. Для них утверждение очевидно.

2. Пусть n не равно 2, 3 и 5.

(n-1)!+1 не делится на n для составных n. Значит n – простое число.

$$(n-1)! + 1 = n^r,$$

где r – натуральная степень числа n.

$$(n-1)! = n^r - 1$$

Разделим обе части равенства на n-1.

$$(n-2)! = \sum_{i=0}^{r-1} n^i$$

Заметим, что n-1 является составным числом, не равным 4 для всех простых n, больших 5, так как в этом случае n нечетное и n-1 четное, большее 4, то есть составное. Тогда по данной лемме:

$$(n-2)! \vdots (n-1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{r-1} n^i \vdots (n-1)$$

Положим, что:

$$P(n) = \sum_{i=0}^{r-1} n^i$$

По теореме Безу,

$$P(n) = (n-1)Q(n) + P(1)$$

Заметим, что Q(n) является многочленом с целыми коэффициентами, так как при делении многочлена на приведенный одночлен получаем многочлен с целыми коэффициентами. Значит, для любых n, Q(n) – целое число.

Значит:

$$P(1) \vdots (n-1)$$

Заметим, что:

$$P(1) = \sum_{i=0}^{r-1} 1^i = r$$

Тогда:

$$r \vdots (n-1) \Rightarrow r \geq n-1$$

Получаем:

$$(n-1)^{n-1} \geq (n-1)! = n^r - 1 \geq n^{n-1} - 1 = \left((n-1)+1\right)^{n-1} - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (n-1)^i - 1 \geq$$

$$\geq (n-1)^{n-1} + (n-1) \bullet (n-1)^{n-2} - 1 = 2(n-1)^{n-1} - 1$$

Первое неравенство верно, так как каждый множитель слева больше либо равен каждому множителю справа, причем обе части неравенства – это произведения n-1 чисел.

Тогда:

$$(n-1)^{n-1} \geq 2(n-1)^{n-1} - 1 \Rightarrow (n-1)^{n-1} \leq 1$$

Очевидно, что последнее неравенство неверно для n>2, противоречие.

Теорема доказана.

Автор выражает признательность А. Б. Скопенкову и А. А. Заславскому за ценные комментарии, полученные при работе над задачей.