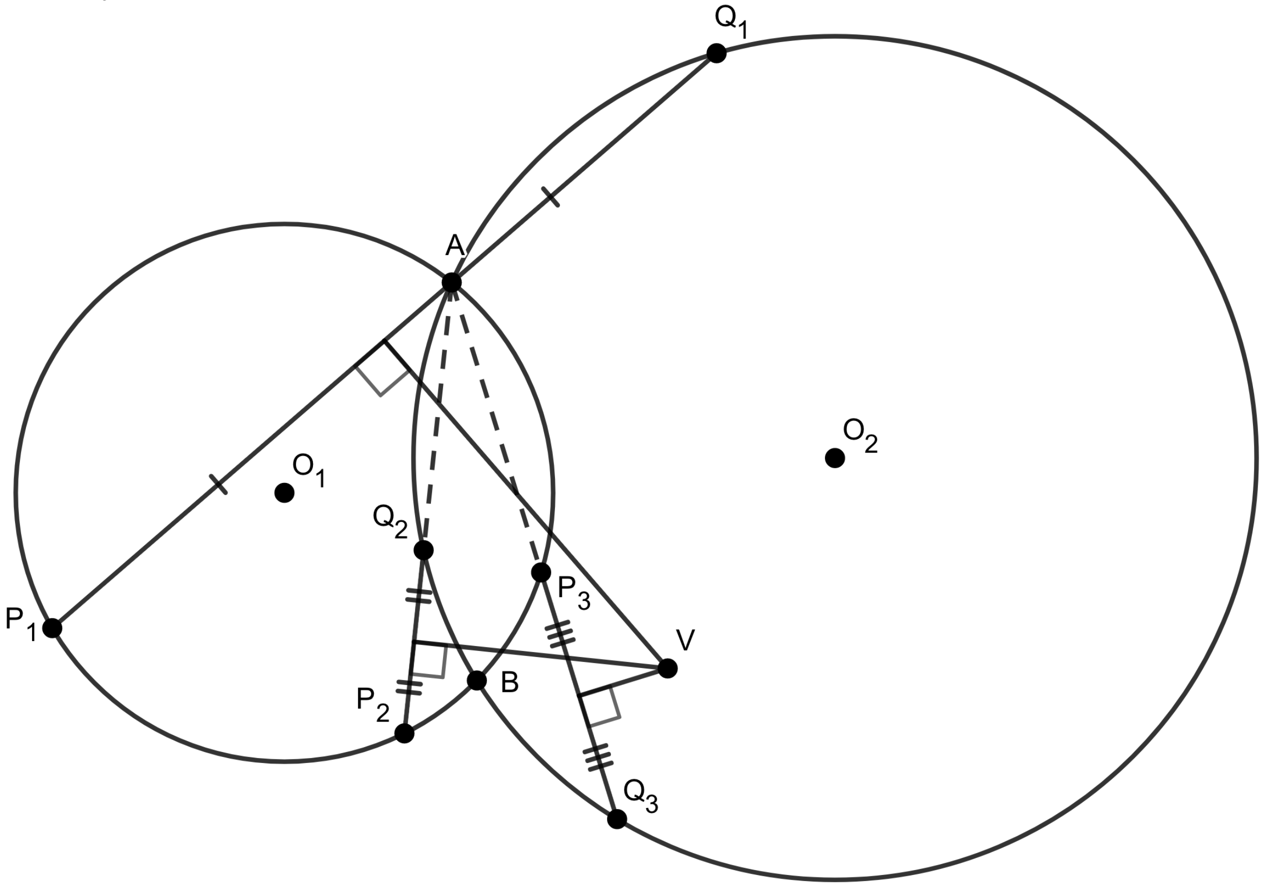
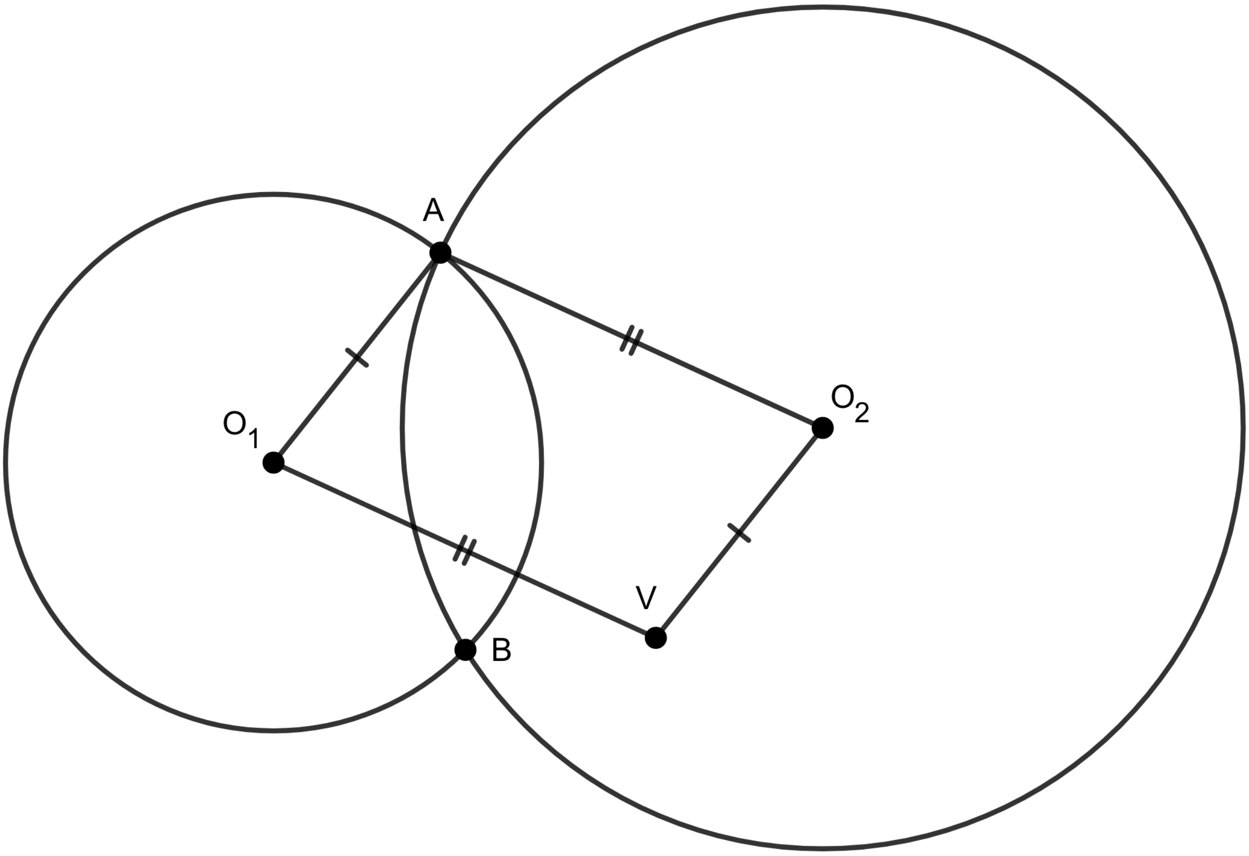
Применение теоремы о точке двух велосипедистов.

Луценко Антон ФМШ 2007 2019г.

Теорема о точке двух велосипедистов: *Возьмем две окружности ω_1 и ω_2. Они пересекаются в точках A и B. Рассмотрим прямую, проходящую через A. Пусть она вторично пересекает окружности в точках P и Q, тогда существует фиксированная точка V, равноудаленная от P и Q не зависимо от выбора прямой. Точку V называют точкой двух велосипедистов.*



Свойство точки двух велосипедистов: *Точка двух велосипедистов из предыдущей теоремы, центры окружностей и точка пересечения этих окружностей образуют параллелограмм.*



Читатель может ознакомиться с доказательством теоремы в статье В.Ю. Протасова из Кванта №3 2008г.

Рассмотренная далее задача была предложена на Иранской олимпиаде 2019г. Решение отличается от официального и не содерит перебора случаев.

Задача: *Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку P. Касательная к ω_1, проведённая в точке P, вторично пересекает ω_2 и ω_3 в точках $P_{1,2}$ и $P_{1,3}$ соответственно. Точки $P_{2,1}, P_{2,3}, P_{3,1}$ и $P_{3,2}$ определяются аналогично. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в одной точке.*

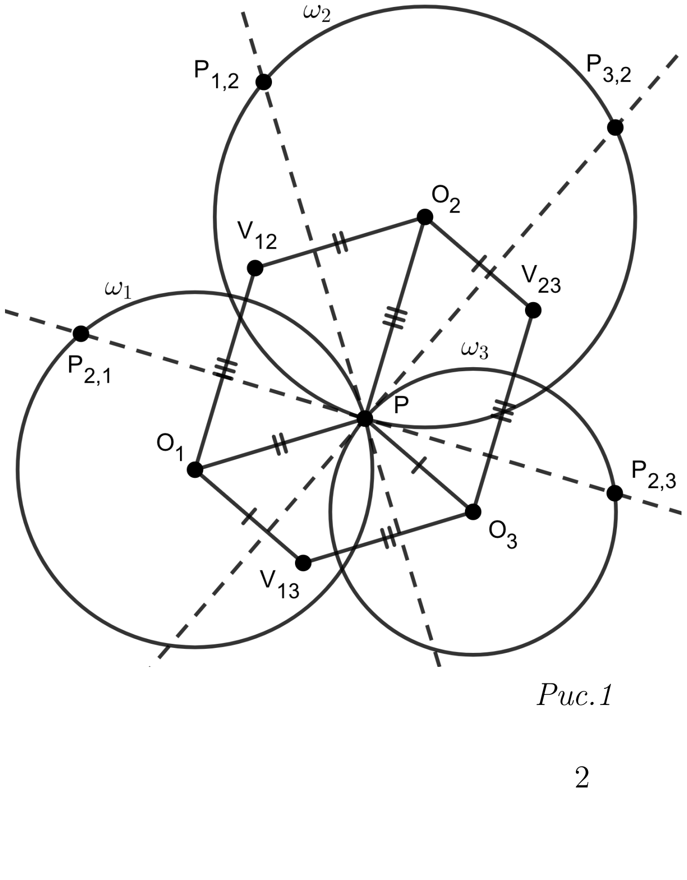


Рис.1

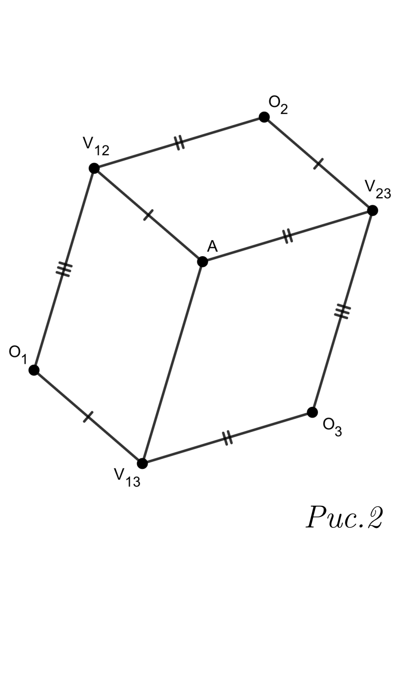


Рис.2

Пусть V_{12} - точка двух велосипедистов для ω_1 и ω_2. Точки V_{13} и V_{23} определяются аналогично. По теореме о точке двух велосипедистов: $V_{12}O_1PO_2, V_{13}O_1O_3P, V_{23}O_2O_3P$ - параллелограммы (рис.1)

Рассмотрим одну из касательных: $P_{3,1}P_{3,2}$. $P_{3,1}P_{3,2} \perp PO_3 \Rightarrow$ серединный перпендикуляр к $P_{3,1}P_{3,2}$ параллелен PO_3. По теореме о двух велосипедистах серединный перпендикуляр к $P_{3,1}P_{3,2}$ - прямая, параллельная PO_3 и проходящая через V_{12}. При этом отметим, что $PO_3 \parallel V_{23}O_2 \parallel V_{13}O_1$. Аналогично определим оставшиеся серединные перпендикуляры.(К $P_{2,1}P_{2,3}$ - параллельный PO_2, через V_{13}, к $P_{1,2}P_{1,3}$ - параллельный PO_1, через V_{23})

Теперь уберем окружности и все точки P(рис.2). Пусть серединный перпендикуляр к $P_{1,2}P_{1,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в A, тогда $AV_{23}O_2V_{12}$ - параллелограмм по определению $\Rightarrow AV_{23} = O_2 \Rightarrow AV_{23} = O_3V_{13}$ Так как $AV_{23} = O_3V_{13}$ и $AV_{23} \parallel O_3V_{13}$, то $AV_{23}O_3V_{13}$ - параллелограмм $\Rightarrow V_{23}O_3 \parallel AV_{13} \Rightarrow AV_{13} \parallel O_2P \Rightarrow AV_{13}$ - серединный перпендикуляр к $P_{2,1}P_{2,3}$. Значит, все 3 серединных перендикуляра пересекаются в одной точке(A), что и требовалось доказать.