Теорема.

Дан граф G, такой, что степень каждой вершины G хотя бы три. Тогда в графе G найдётся простой цикл, длина которого не делится на три.

Теорема предлагалась в качестве задачи на московских осенних математических сборах.

Доказательство.

Рассмотрим наибольший простой путь в графе G: v_1, v_2, …, v_k.
По условию степень вершины v_1 хотя бы три, следовательно, есть хотя бы две различные вершины u и s, отличные от v_2, соединённые с v_1 ребром.

В этом абзаце докажем, что u принадлежат пути v_1, v_2, …, v_k.
Предположим, что u не лежит в этом пути. Тогда рассмотрим путь u, v_1, v_2, … , v_k. Очевидно, он тоже простой, причём его длина больше длины пути v_1, v_2, … , v_k на 1. Получаем противоречие с выбором v_1, v_2, …, v_k.

Аналогично s принадлежит этому пути.

Значит $u=v_i$, $s=v_j$ для некоторых различных i и j. Без ограничения общности будем считать, что $i<j$.
Обозначим за A, B, C длины следующих циклов:
1) v_1, v_2, … , v_i, v_1
2) v_1, v_i, v_{i+1}, … , v_j, v_1
3) v_1, v_2, … , v_j, v_1
Тогда A + B = C + 2. Следовательно среди чисел A, B и C есть число, которое не делится на три. Тогда соответствующий цикл — искомый.