УДК 514.112.3 + 514.112.6

Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых

В. Д. Попов[1]

Аннотация

В данной работе исследуется образ точки Фейербаха при инверсии относительно окружности, построенной на стороне треугольника как на диаметре. Доказаны некоторые свойства этой точки, с их помощью получены более простые доказательства ряда классических результатов о точке Фейербаха. Также получено обобщение теоремы Емельяновых о полюсах треугольника и связанных с ними окружностях, проходящих через точку Фейербаха.

1. Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Одно только определение наводит на естественный и, следует признать, весьма непростой вопрос: а почему факт касания этих двух окружностей действительно имеет место быть? Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году. С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причем многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В данной работе мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении ее инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов (см. [4], [6] и [2]).

Наиболее важным и интересным результатом данной работы, полученным с помощью применения такого подхода, следует считать следующую теорему, обобщающую теорему Емельяновых о семействе окружностей, проходящих через точку Фейербаха (см. [2]).

Теорема 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, его точку Фейербаха F и его серединный треугольник $M_aM_bM_c$. Обозначим через S_{ab} и S_{ac} точки Шарыгина, соответствующие стороне BC (см. точные определения в следующем разделе). Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F (см. рис. 19). Рассмотрим окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ и $\psi_{ac}^{\triangle}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Тогда точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$.*

Таким образом, каждый треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха, порождает три пары замечательных окружностей, каждая из которых проходит через точку Фейербаха и одну из точек Шарыгина. Точку $A^{\triangle}$, фигурирующую в теореме 1, и аналогичные ей точки $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ на прямых P_cP_a и P_aP_b соответственно, назовем *обобщенными полюсами треугольника ABC*. Смысл такого названия заключается в том, что если треугольник $P_aP_bP_c$ совпадает с треугольником $K_aK_bK_c$ (см. необходимые обозначения в следующем разделе), то точки $A^{\triangle}$, $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ превращаются в точки A_{00}, B_{00} и C_{00}, введенные Емельяновыми в статье [2] и названные ими *полюсами треугольника ABC*.

[1] Лицей «Вторая школа»; *e-mail*: popov.l2sh@gmail.com

2. Вспомогательные факты

Для начала зафиксируем обозначения.

- A, B, C — вершины треугольника;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB.
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре.
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т.е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно.
- ε, ε_a — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно.
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

Мы начнем с того, что приведем доказательство теоремы Фейербаха. Это доказательство, найденное П. В. Бибиковым, является модификацией классического доказательства теоремы Фейербаха (см., например, [1]), использующего инверсию, однако более геометрично и менее счетно. Для начала дадим следующее определение.

Определение 1. Точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой, образуют *гармоническую четверку*, если

$$[AB, CD] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1.$$

Понятие гармонической четверки точек тесно связано с инверсией. А именно, четверка точек A, B, C, D образует гармоническую четверку, если и только если точки A и B симметричны относительно окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре (см., например, [3]). Перейдем теперь к доказательству теоремы Фейербаха.

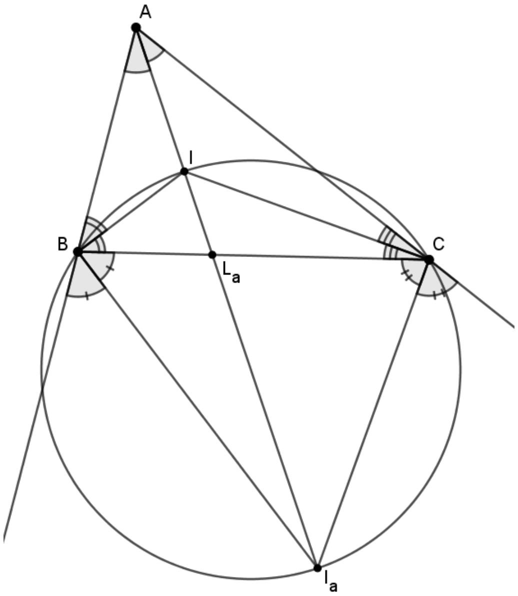

Рис. 1.

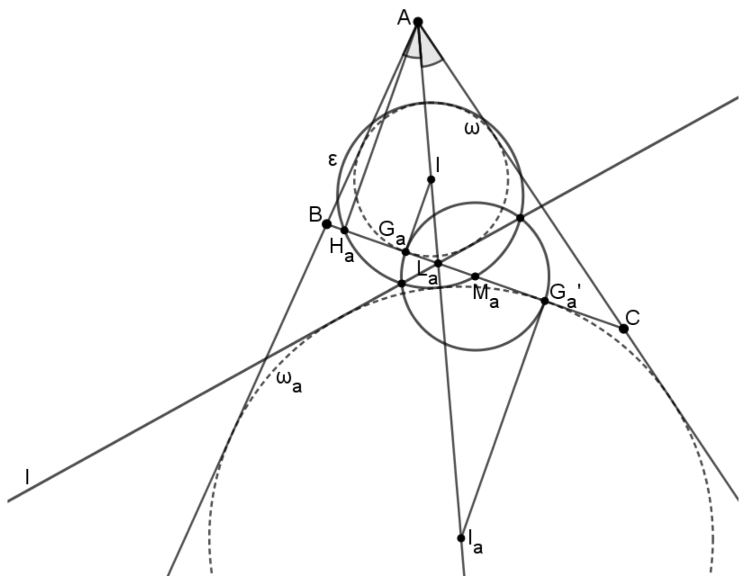

Рис. 2.

Доказательство. Обозначим центр вневписанной окружности треугольника через I_a, а основание биссектрисы, проведенной из вершины A, через L_a. Тогда окружность, построенная на отрезке I_aI как на диаметре, является окружностью Аполлония (см. [3]) для пары точек (A, L_a). Из этого следует, что (A, L_a, I, I_a) — гармоническая четверка (см. рис. 1). Параллельно спроектировав ее на прямую BC, мы получим новую гармоническую четверку (H_a, L_a, G_a, G'_a) (где G'_a — точка касания вневписанной окружности ω_a со стороной BC). Это означает, что точки H_a и L_a симметричны относительно окружности, построенной на отрезке $G_aG'_a$ как на диаметре (см. рис. 2). Так как $G_aB = G'_aC$, центр этой окружности совпадает с серединой M_a отрезка BC. Отсюда следует, что при инверсии относительно этой окружности окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ, проходящую через L_a. С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, т.к. обе они ортогональны окружности инверсии (поскольку $IG_a \perp M_aG_a$ и $I_aG'_a \perp M_aG'_a$). Покажем, что прямая ℓ касается окружностей ω и ω_a. Для этого достаточно доказать, что прямая ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажем это.

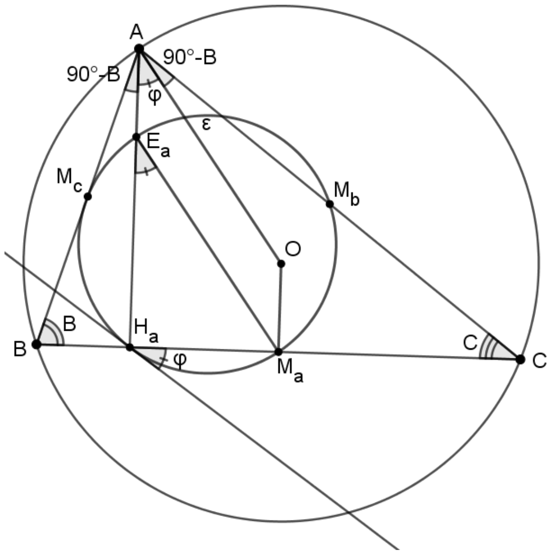

Рис. 3.

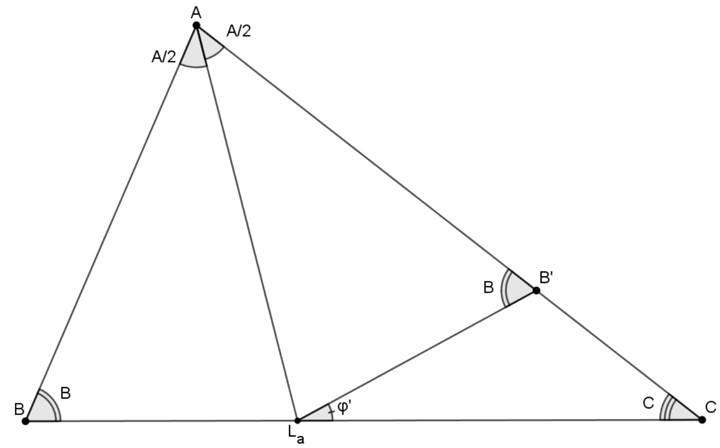

Рис. 4.

Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ω и BC (угол φ на рис. 3). Далее, этот угол равен углу $\angle H_aE_aM_a$. Четырехугольник OM_aE_aA является параллелограммом, поэтому $\angle H_aE_aM_a = \angle E_aAO$. Тогда $\angle BAE_a = \angle OAC = 90^\circ - \angle B$. Получаем, что

$$\varphi = \angle E_aAO = |\angle A - 2 \cdot (90^\circ - \angle B)| = |\angle B - \angle C|.$$

Теперь рассмотрим прямую $B'L_a$, симметричную прямой BC относительно биссектрисы AL_a. Обозначим угол между $B'L_a$ и BC через φ' (см. рис. 4). Из треугольника $B'L_aC$ получаем, что $\varphi' = |\angle B - \angle C| = \varphi$. Это означает, что прямые ℓ и $B'L_a$ совпадают, что и требовалось доказать. □

В дальнейших рассуждениях нам понадобится результат так называемой задачи №255, получившей широкую известность благодаря предисловию задачника И. Ф. Шарыгина [5], в котором она приведена под соответствующим номером.

Лемма 1 (Задача №255)**.** Тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_cG_c, CI, M_aM_c) пересекаются в точках S_{ab} и S_{ac}. Эти точки лежат на окружности λ_a, построенной на стороне BC как на диаметре (см. рис. 5).

Замечание 1. Пусть K_a, K_b и K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI и CI соответственно. Прямая G_aK_b симметрична прямой G_bG_c относительно BI, поэтому точка S_{ab} лежит на G_aK_b. Аналогично, точка S_{ac} лежит на G_aK_c (см. рис. 5).

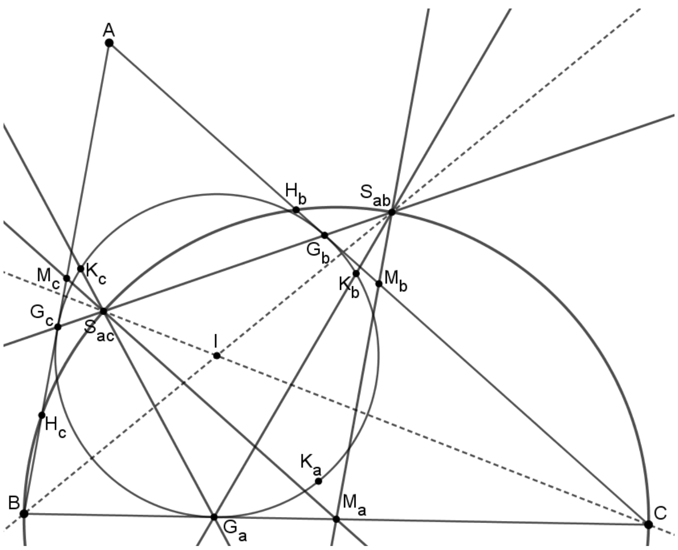

Рис. 5.

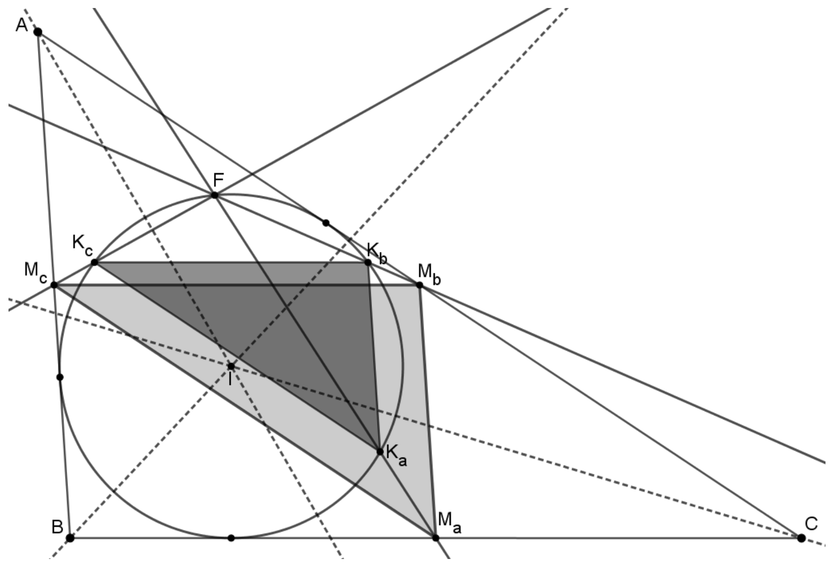

Рис. 6.

С точкой Фейербаха оказывается тесно связана задача, предложенная в финале Всероссийской олимпиады по математике в 10 классе в 1998 году под номером 8. В задаче требовалось доказать, что прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 6; отметим, что краткий вариант этой задачи, в которой предлагалось просто доказать, то прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке, был предложен на 23 Международной математической олимпиаде в 1982 г. под номером 2).

Для начала докажем, что верна следующая

Лемма 2. Стороны треугольника $K_aK_bK_c$ попарно параллельны сторонам треугольников ABC и $M_aM_bM_c$ (см. рис. 6).

Доказательство. Хорды G_aK_b и G_bG_c симметричны относительно BI, поэтому они равны. Аналогично, хорды G_bG_c и G_aK_c симметричны относительно CI и потому также равны. Тогда треугольник $K_cG_aK_b$ равнобедренный, откуда следует, что $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$ (см. рис. 7). Отсюда очевидна параллельность прямых BC и K_bK_c. Для двух оставшихся пар сторон рассуждения аналогичны. □

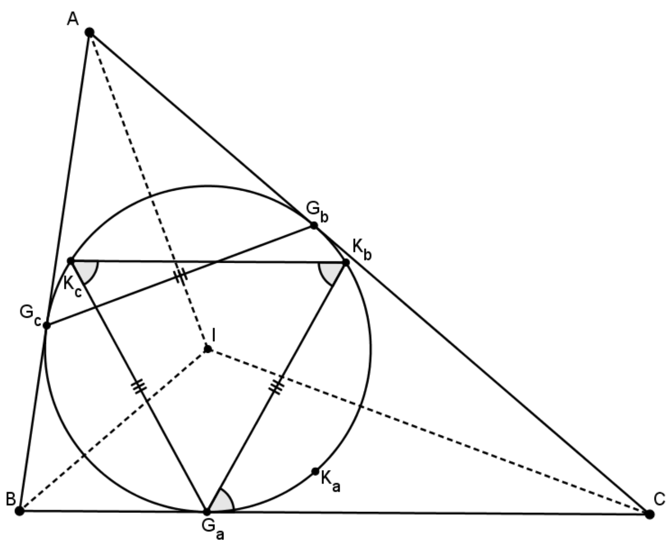

Рис. 7.

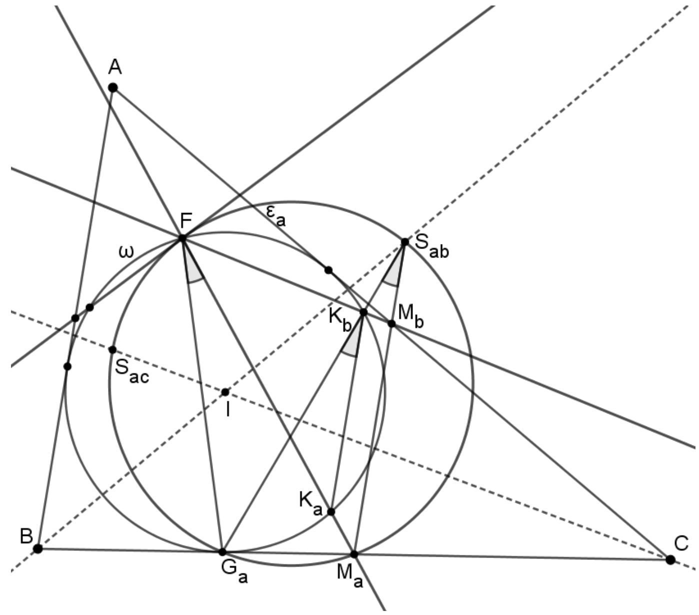

Рис. 8.

По лемме 2 и теореме Дезарга треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ гомотетичны. Точка пересечения прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c является центром этой гомотетии, а значит и центром гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера, то есть точкой Фейербаха F.

Нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. Точка F лежит на окружности Эйлера ε_a треугольника BIC (см. рис. 8).

Доказательство. Заметим, что точки G_a, S_{ac}, S_{ab} и M_a лежат на окружности ε_a, поскольку первая тройка точек — это основания высот треугольника BIC, а точка M_a — середина его стороны BC. Далее, F, G_a, K_a, K_b лежат на вписанной окружности ω треугольника ABC. Значит, $\angle G_aFK_a = \angle G_aK_bK_a$. Т.к. $K_aK_b \parallel S_{ab}M_a$, то $\angle G_aK_bK_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ (точки G_a, K_b, S_{ab} лежат на одной прямой по лемме 1. Значит, $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ и точка F лежит на окружности ε_a. □

Замечание 2. Для любого треугольника и любой точки, не лежащей ни на одной прямой из содержащих стороны треугольника, все окружности Эйлера для треугольников, образованных одной из пар вершин исходного треугольника и точкой, имеют общую точку (эта точка называется точкой Понселе; см. рис. 9). В случае точки I по лемме 3 точка Понселе является точкой Фейербаха.

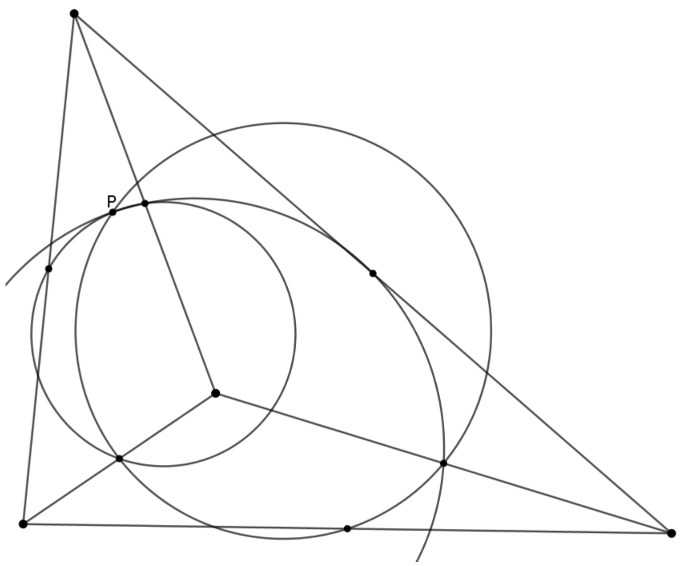

Рис. 9.

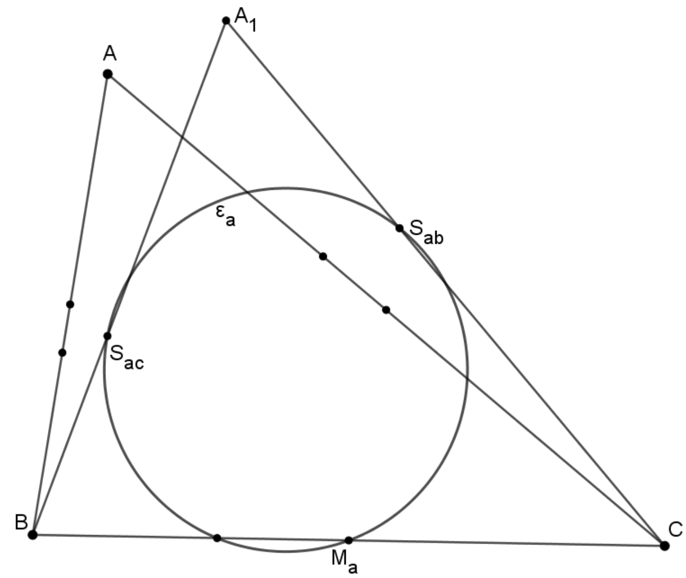

Рис. 10.

Замечание 3. Если продлить прямые BS_{ac} и CS_{ab} до пересечения в точке A_1, то окружность ε_a станет окружностью Эйлера треугольника A_1BC (см. рис. 10). Действительно, точки S_{ab} и S_{ac} являются основаниями высот, а точка M_a — середина стороны BC.

3. Инверсный образ точки F

Теперь перейдем к содержательной части программы, которая, наконец, будет использовать инверсию. Рассмотрим уже знакомую нам окружность λ_a, построенную на отрезке BC как на диаметре. Рассмотрим точку F'_a — образ точки F при инверсии относительно окружности λ_a. Точка F'_a будет основным объектом наших дальнейших рассуждений.

Для начала посмотрим, куда переходят некоторые точки и окружности при инверсии относительно λ_a. Окружность Эйлера ε перейдет в прямую H_bH_c, окружность ε_a перейдет в прямую $S_{ab}S_{ac}$. Кроме того, поскольку точка F является точкой пересечения окружностей ε и ε_a по лемме 3, то точка F'_a является точкой пересечения прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$. В итоге мы получаем следующее красивое

Предложение 1. Точка F'_a является радикальным центром окружностей λ_a, ε и ε_a (см. рис. 11).

Замечание 4. В статье [2] точка F'_a называлась *полюсом* треугольника ABC и обозначалась через A_{00}.

Следующий факт в дальнейшем будет играть основную роль, поэтому уделим ему особое внимание.

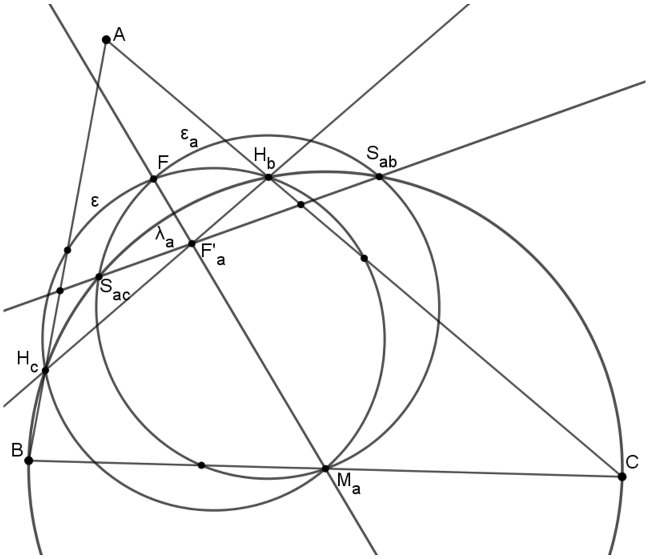

Рис. 11.

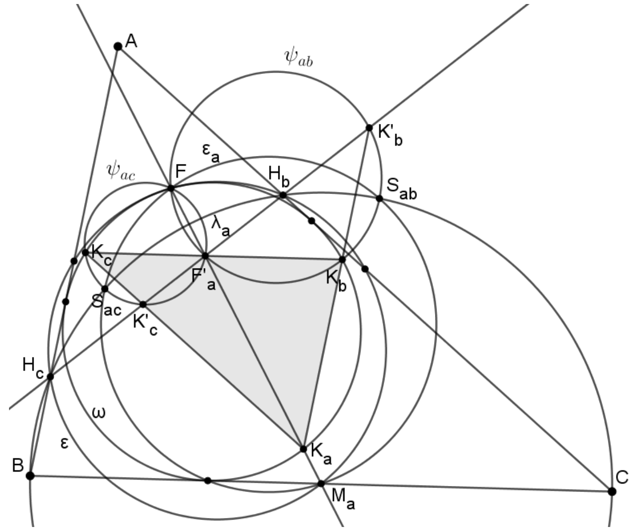

Рис. 12.

Теорема 2. *Если K'_b и K'_c — точки пересечения лучей K_aK_b и K_aK_c с прямой H_bH_c, то пятерки точек $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ и $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ лежат на окружностях ψ_{ab} и ψ_{ac} (см. рис. 12).*

Доказательство. Сначала докажем, что четыре точки F, F'_a, K_b, K'_b лежат на одной окружности (рассуждения для четверки точек F, F'_a, K_c, K'_c аналогичны). Рассмотрим инверсию Inv_{K_a} с центром в точке K_a, переводящую точку F'_a в точку F. Тогда композиция инверсий $\mathrm{Inv}_{K_a} \circ \mathrm{Inv}_{\lambda_a}$ переводит окружность Эйлера ε в некоторую окружность ω', проходящую через точки F и K_a. В силу того, что инверсия — конформное преобразование, эта композиция сохраняет углы между прямыми и окружностями. Раз центры обеих инверсий лежат на прямой FF'_a, то окружности ε и ω' образуют с прямой FF'_a равные углы. Но это означает, что окружности ε и ω' касаются в точке F. Отсюда следует, что окружности ω и ω' совпадают, поскольку существует единственная окружность, проходящая через точку K_a и касающаяся окружности ε в точке F.

Далее, заметим, что точка K'_b пересечения луча K_aK_b с прямой H_bH_c — это образ точки K_b при инверсии Inv_{K_a}. Значит, по лемме о подобных треугольниках (см., например, [3]) точки F, F'_a, K_b и K'_b лежат на одной окружности.

Осталось загнать на окружности точки S_{ab} и S_{ac}. Для этого используем вписанные углы. Во-первых, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$ (см. рис. 13). Во-вторых, пусть прямая FK_b вторично пересекает окружность ε_a в точке R. Тогда $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Прямые M_aS_{ac} и K_aK_c параллельны (см. лемму 2), поэтому вторые лучи равных углов $\angle M_aS_{ac}R$ и $\angle M_aFR$ также параллельны, т.е. $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. Отсюда сразу следует равенство углов $\angle M_aFR$ и $\angle S_{ac}S_{ab}G_a$. Значит, точки F, F'_a, K_b, K'_b и S_{ab} лежат на одной окружности. Для точки S_{ac} рассуждения аналогичны. Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 5. Прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab}. Это следствие ортогональности окружностей ψ_{ab} и λ_a (см. [3]).

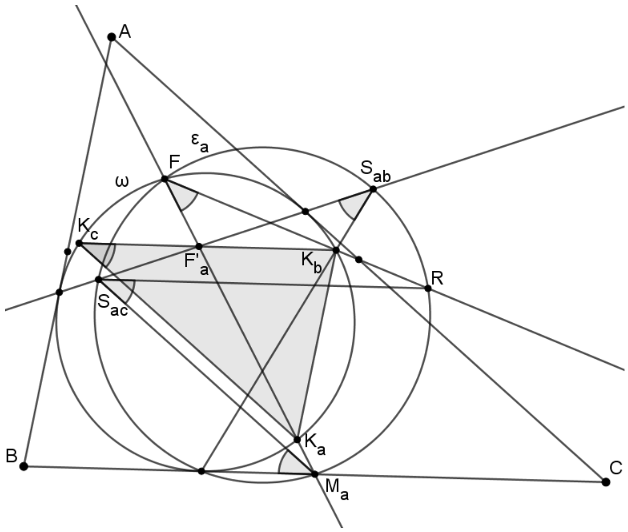

Рис. 13.

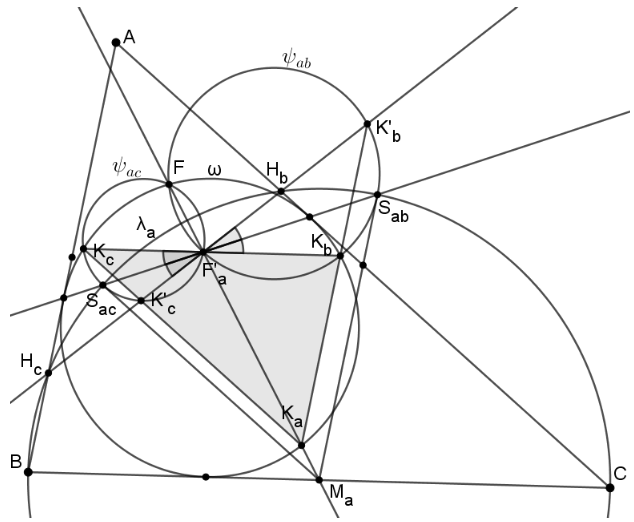

Рис. 14.

Предложение 2. Точка F'_a лежит на прямой K_bK_c (см. рис. 14).

Доказательство. Заметим, что окружности ψ_{ab} и ψ_{ac} ортогональны λ_a, т.к. они обе проходят через точки F, F'_a, симметричные относительно λ_a. Тогда по свойству ортогональных окружностей прямые M_aS_{ab} и M_aS_{ac} касаются окружностей ψ_{ab} и ψ_{ac} соответственно. Пары прямых (M_aS_{ab}, K_aK_b) и (M_aS_{ac}, K_aK_c) параллельны, следовательно, $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ и $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$ (параллельные прямые высекают на окружности равные хорды). Тогда $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K_cF'_aS_{ac} = \angle K'_cF'_aS_{ac}$. Поскольку точка F'_a лежит на прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$, углы $\angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K'_cF'_aS_{ac}$ равны. Значит,

$$\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab} = \angle K'_cF'_aS_{ac} = \angle K_cF'_aS_{ac},$$

откуда следует утверждение 2. □

Замечание 6. Из доказательства также следует, что прямая $S_{ab}S_{ac}$ является биссектрисой угла $\angle K_bF'_aH_b$.

Суммируя утверждения 1 и 2, мы получаем, что через точку F'_a проходят четыре замечательные прямые: K_aM_a, H_bH_c, $S_{ab}S_{ac}$ и K_bK_c.

Замечание 7. Можно доказать (см., например, [2]), что через точку F'_a проходят еще две замечательные прямые: L_bL_c (где L_b и L_c — основания биссектрис BI и CI соответственно) и $G'_bG'_c$ (где G'_b и G'_c — точки касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами AC и AB).

4. Следствия

Теперь мы приведем несколько результатов, доказательства которых можно получить с помощью нашего подхода, связанного с рассмотрением образа F'_aточки Фейербаха F при инверсии относительно окружности λ_a. Начнем с задачи с Международной Математической Олимпиады 2000 года, предложенной под номером 6, решение которой мы получаем совершенно бесплатно. Ее условие формулировалось следующим образом.

Пусть ABC — остроугольный треугольник. Основания высот треугольника по-прежнему будем обозначать через H_a, H_b, H_c, а точки касания вписанной окружности со сторонами — через G_a, G_b, G_c. Отразим прямую H_aH_b относительно прямой G_aG_b. Аналогично, отразим H_bH_c относительно G_bG_c и H_cH_a относительно G_cG_a (см. рис. 15). Докажите, что три отраженные прямые при пересечении образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.

Из предложения 2 следует, что, например, прямые H_bH_c и K_bK_c симметричны относительно прямой G_bG_c. Тогда прямые H_aH_b, H_bH_c, H_cH_a при отражении соответственно относительно G_aG_b, G_bG_c, G_cG_a перейдут в прямые, содержащие стороны треугольника $K_aK_bK_c$, что и требовалось доказать.

Более важным и интересным для нас будет следующий результат, анонсированный Л. и Т. Емельяновыми [2] и обобщенный в работе Гринберга [6] (см. также статью Ф. Ивлева [4]). Формулируется он следующим образом.

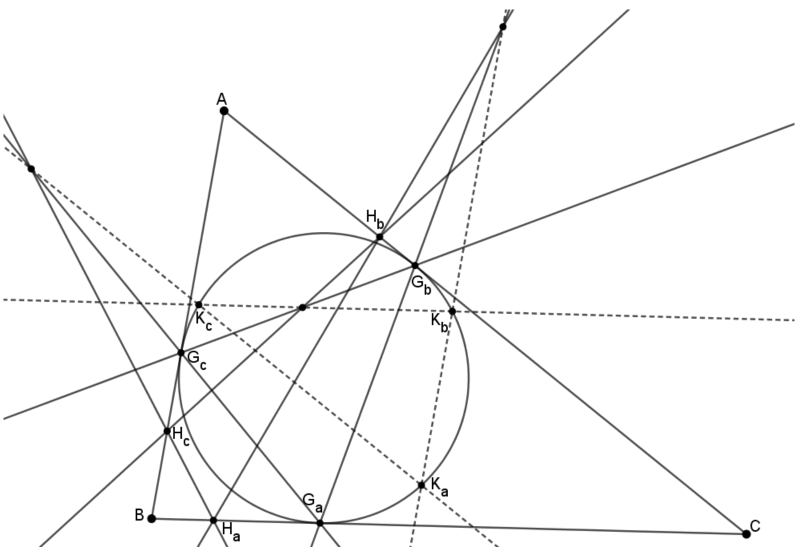

Рис. 15.

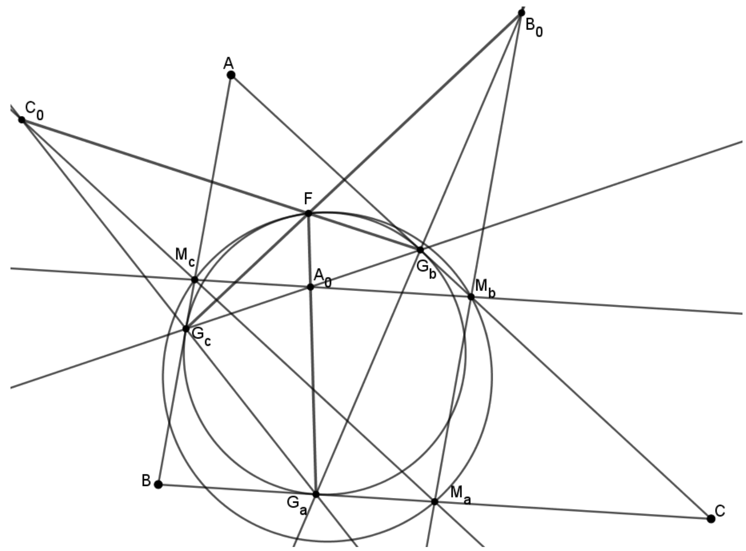

Рис. 16.

Теорема 3. *Обозначим через A_0, B_0 и C_0 точки пересечения соответствующих сторон треугольников $M_aM_bM_c$ и $G_aG_bG_c$. Тогда прямые A_0G_a, B_0G_b и C_0G_c пересекаются в точке F (см. рис. 16).*

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 3. Пусть T_a — точка пересечения прямых FG_a и $S_{ab}S_{ac}$. Тогда четверки точек (F, T_a, M_b, S_{ab}) и (F, T_a, M_c, S_{ac}) лежат на окружностях ψ'_{ab} и ψ'_{ac} (см. рис. 17).

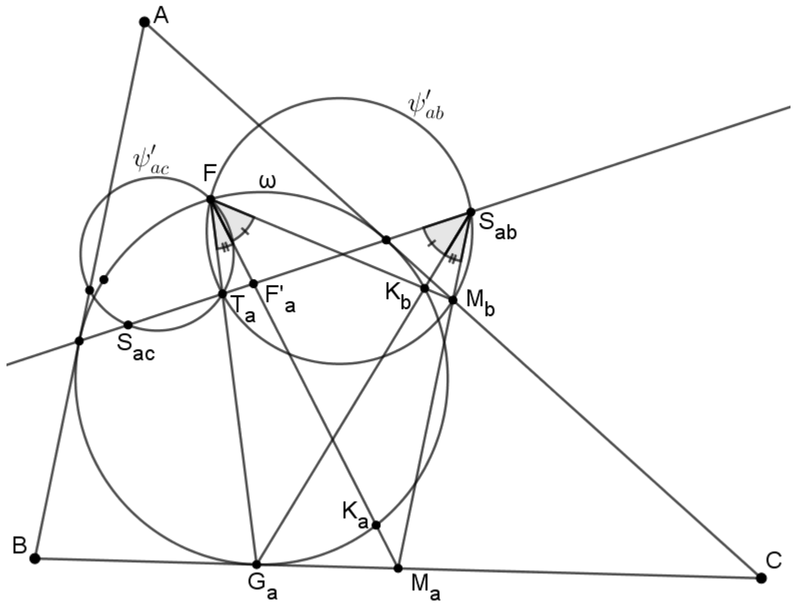

Рис. 17.

Доказательство. Приведем доказательство для окружности ψ'_{ab}, поскольку для окружности ψ'_{ac} рассуждения аналогичны. По теореме 2 $\angle M_aFM_b = \angle G_aS_{ab}T_a$. По лемме 2 $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Тогда

$$\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b,$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 3 мы дадим в следующем разделе.

5. Точка Фейербаха как точка Микеля и обобщение теоремы Емельяновых

Приглядевшись к рис. 12 и 17, иллюстрирующим теорему 2 и предложение 3, нельзя не заметить их похожесть: и там, и там присутствуют окружности, проходящие через четверки точек, среди которых точка Фейербаха. Оказывается, что это неслучайно, и оба этих результата являются частными случаями некоторой общей конфигурации. В этом разделе мы изучим эту конфигурацию и продемонстрируем ее связь с еще одним классическим результатом геометрии — теоремой Микеля.

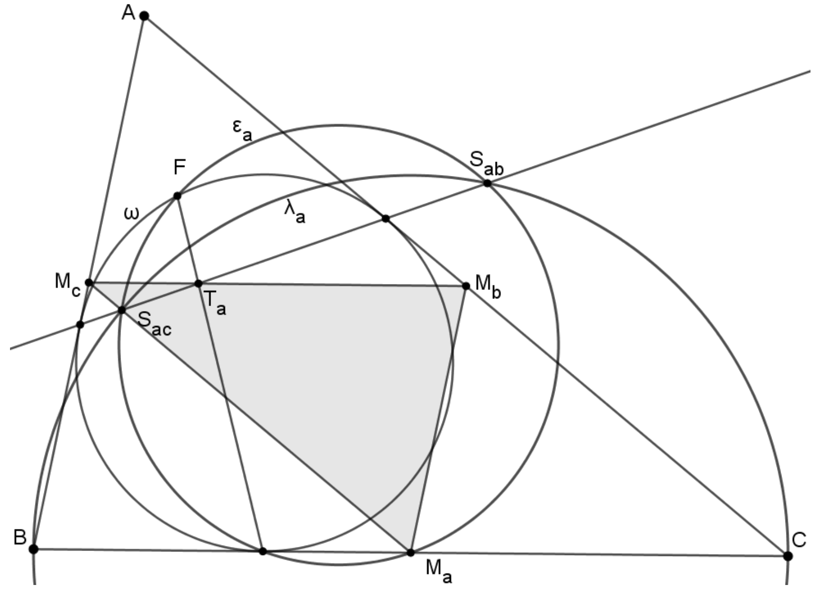

Рис. 18.

Для начала заметим, что F является точкой Микеля для треугольника $M_aM_bM_c$ и прямой $S_{ab}S_{ac}$ (см. рис. 18). Отсюда следует, что точка T_a лежит на прямой M_bM_c. Тогда точка T_a есть точка A_0 из теоремы 3, по построению лежащая на FG_a. Аналогичное утверждение справедливо для двух оставшихся точек B_0 и C_0. Тем самым теорема 3 доказана.

Рассмотрение точки F в качестве точки Микеля оказывается не просто вспомогательным шагом к доказательству теоремы 3. На самом деле именно этот ход элегантно обобщает предыдущие результаты и вскрывает причину явления. Реализуем эту конструкцию в общем случае. Для этого докажем теорему 1, сформулированную в начале статьи. Напомним ее формулировку.

Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F (см. рис. 19). Рассмотрим окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ и $\psi_{ac}^{\triangle}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Тогда точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы похоже на доказательство предложения 2. А именно, рассмотрим окружность ψ'_{ab}, проходящую через точку T_a (см. предложение 3). Тогда запишем цепочку равенств углов:

$$\angle A^{\triangle}P_bF = \angle T_aM_bF = \angle T_aS_{ab}F = \angle A^{\triangle}S_{ab}F,$$

откуда следует, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$. Аналогично доказывается, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi_{ac}^{\triangle}$. □

Поясним, почему теорема 1 действительно является обобщением приведенных выше задачи с Международной Олимпиады и теоремы Ивлева. Для этого рассмотрим вторые точки $C_1^{\triangle}$ и $B_1^{\triangle}$ пересечения окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ с прямой P_aP_b и пересечения окружности $\psi_{ac}^{\triangle}$ с прямой P_aP_c. Тогда точки $A^{\triangle}$, $B_1^{\triangle}$ и $C_1^{\triangle}$ лежат на одной прямой по теореме Микеля. В случае задачи с Международной олимпиады эта прямая совпадает с H_bH_c, а точка $A^{\triangle}$ совпадает с F'_a (см. рис. 20). В случае теоремы Ивлева эта прямая совпадает с G_bG_c (или, что то же самое, с $S_{ab}S_{ac}$), а точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой T_a (см. рис. 21)

В заключение отметим одну замечательную окружность из семейства $\psi_{ac}^{\triangle}$.

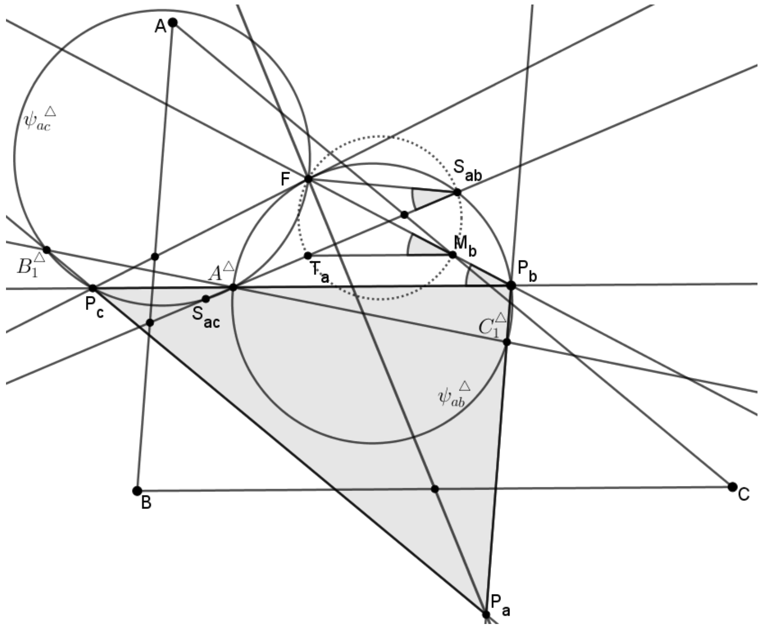

Рис. 19.

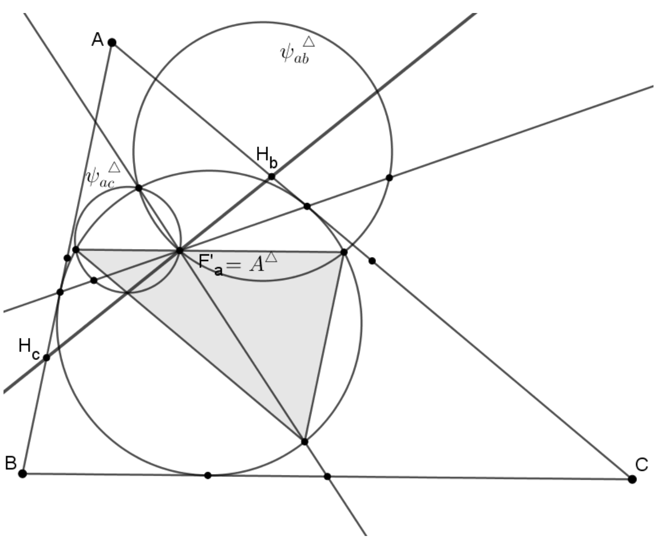

Рис. 20. Прямая H_bH_c

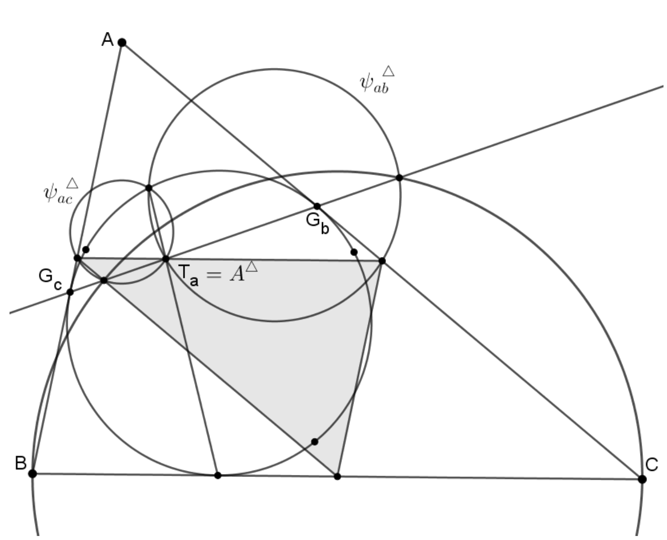

Рис. 21. Прямая G_bG_c

Предложение 4. В случае, когда точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой G_b, окружность $\psi_{ac}^{\triangle}$ проходит через точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca} (см. рис. 22).

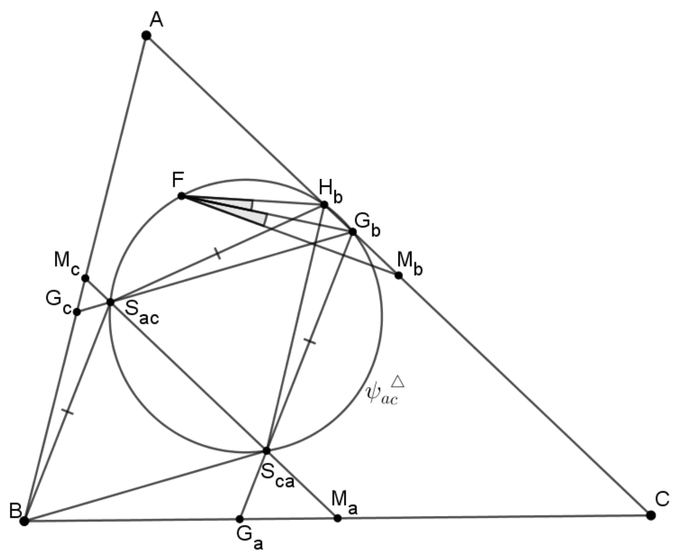

Рис. 22.

Доказательство. Достаточно доказать, что точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca} лежат на одной окружности. Вначале докажем, что четверка точек $(H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca})$ лежит на одной окружности. Заметим, что прямые BS_{ca} и H_bS_{ac} параллельны, т.к. обе они перпендикулярны биссектрисе угла $\angle BAC$. Аналогично, прямые BS_{ac} и G_bS_{ca} параллельны, т.к. обе они перпендикулярны биссектрисе угла $\angle ACB$. Поэтому четырехугольник $BS_{ac}H_bS_{ca}$ является параллелограммом и $H_bS_{ac} = BS_{ca} = G_bS_{ca}$. Значит, $S_{ac}H_bG_bS_{ca}$ — равнобокая трапеция, и потому вокруг нее можно описать окружность (см. рис. 22).

Теперь докажем, что точка Фейербаха также лежит на этой окружности. По лемме Архимеда следует, что $\angle H_bFG_b = \frac{1}{2}\angle H_bFM_b = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C|$. Далее, $\angle H_bS_{ac}S_{ca} = \angle S_{ca}G_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}$ и $\angle G_bS_{ac}S_{ca} = \angle AG_bS_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}$, поэтому

$$\angle H_bS_{ac}G_b = |\angle H_bS_{ac}S_{ca} - \angle G_bS_{ac}S_{ca}| = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C| = \angle H_bFG_b,$$

откуда следует, что точка F лежит на описанной окружности трапеции $H_bG_bS_{ca}S_{ac}$, что и требовалось доказать. □

Автор благодарит П.В. Бибикова за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[2] *Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.* Семейство Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 78–92.

[3] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Ивлев Ф. А.* Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 219–228.

[5] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия: планиметрия. Задачник. 9–11 классы. М.: Дрофа, 2002.

[6] *Grinbegr D.* Generalization of the Feuerbach point //
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html`

Попов Вадим Дмитриевич
ученик 10 класса ГБОУ «Лицей «Вторая школа»;
e-mail: `popov.l2sh@gmail.com`