О рациональности косинуса угла правильного многоугольника

Вигдорчик Леонид

Руководитель проекта:
Аркадий Борисович Скопенков

Теорема. *Число* $\cos\frac{2\pi}{n}$ *рационально только при* $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Эта задача уже была решена.

В книге [1] [§4.1 и §5.4] доказательство разбито на задачи, которые я самостоятельно решил.

Доказательство. При $n = 1, 2, 3, 4, 6$ имеем $\cos\frac{2\pi}{n}{=}1, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. Эти значения косинуса рациональны.

При $n = 5, 8, 12$ имеем $\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Эти значения косинуса иррациональны.

Случай нечётного $n > 5$. Напомним, что многочлен Чебышёва (первого рода) определяется формулой

$$T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Тогда $\cos\frac{2\pi}{n}$ является корнем многочлена $T_n(x) - 1$. Напомним, что свободный член многочлена T_n при нечётных n равен 0, и старший коэффициент многочлена Чебышёва равен 2^{n-1}. Значит, свободный член многочлена $T_n(x) - 1$ равен -1. Поэтому по теореме о рациональных корнях, если $\cos\frac{2\pi}{n}$ рационален, то $\cos\frac{2\pi}{n} \in \{\pm\frac{1}{2^0}, \pm\frac{1}{2^1}, \ldots, \pm\frac{1}{2^{n-1}}\}$. Но при $n \geq 7$ имеем $\cos\frac{2\pi}{n} \in (\frac{1}{2}; 1)$. Этот интервал не пересекает множество $\{\pm\frac{1}{2^0}, \pm\frac{1}{2^1}, \ldots, \pm\frac{1}{2^{n-1}}\}$.

Случай чётного $n > 6$. По формуле косинуса двойного угла $2\cos^2\frac{2\pi}{n}{=}\cos\frac{4\pi}{n} + 1$. Квадрат рационального числа рационален. Значит, если $\cos\frac{2\pi}{n/2} = \cos\frac{4\pi}{n}$ иррационален, то $\cos\frac{2\pi}{n}$ также иррационален. Из этого и из того, что при нечётном $n > 3$ и $n = 8, 12$ число $\cos\frac{2\pi}{n}$ иррационален получаем, что при любом чётном $n > 6$ (в частности при $n > 12$ и $n = 10$) $\cos\frac{2\pi}{n}$ иррационален.

Литература

[1] под редакцией А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б.Скопенкова, Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки — к профессии, https://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf