Итерации функции Эйлера

К. Зюбин

Томск, МАОУ СОШ № 32, 8Б, 2019

Аннотация

В настоящей статье рассматриваются последовательности попарно различных натуральных чисел $(n_0, \ldots)$, такие что для каждого $i > 0$ выполняется $\varphi(n_i) = n_{i-1}$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Доказывается, что всякая такая бесконечная последовательность, начинающаяся с $n_0 = 1$, либо

(I) имеет вид $n_i = 2^i$, $i \in \mathbb{N}$, либо

(II) существует натуральное l, такое что $n_i = 2^i$ при $i \leqslant l$ и $n_i = 2^l 3^{i-l}$ для всех $i > l$.

Как следствие, доказывается, что произвольная бесконечная последовательность с таким свойством является сегментом одной из вышеуказанных последовательностей I или II.

Определение 1. *Обозначим через $\varphi(n)$ количество натуральных чисел меньших n и взаимно простых с ним. По определению $\varphi(1) = 1$. Функция φ называется* ***функцией Эйлера****.*

Пример. Для числа 24 существует 8 меньших его и взаимно простых с ним чисел $(1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23)$, поэтому $\varphi(24) = 8$.

Теорема 1 ([1], [2])**.** *Если $n = p_1^{a_1} \ldots p_m^{a_m}$, то $\varphi(n) = p_1^{a_1-1} \ldots p_m^{a_m-1}(p_1 - 1) \ldots (p_m - 1)$.*

Теорема 2 (Теорема Эйлера, [1], [2])**.** *Если натуральные числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$.*

Следствие (Малая теорема Ферма)**.** *Если p — простое число и a не делится на p, то $(a^{p-1}-1) \vdots p$.*

Определение 2. *Сегментом последовательности назовем подпоследовательность из идущих подряд членов этой последовательности.*

Например, последовательность $(2, 4, 12)$ является сегментом последовательности $(1, 2, 4, 12, 36, 37)$.

Определение 3. ***Число Софи Жермен*** *— это простое число p, такое что число $2p+1$ также является простым.*

Например, это числа 2 $(2 \cdot 2 + 1 = 5)$ и 3 $(3 \cdot 2 + 1 = 7)$, так как 5 и 7 — простые числа.

Определение 4. ***Последовательностью Софи Жермен*** *степени l назовем последовательность из натуральных чисел, где каждое следующее число имеет вид $2^l(2p+1)$, где $2^l p$ — предыдущее число и p — число Софи Жермен.*

Пример последовательности Софи Жермен первой степени: $(4, 10, 22, 46, 94)$.

Лемма 1. *Пусть $(n_0, n_1, \ldots)$ — последовательность Софи Жермен, тогда она конечна и для всех $i > 0$ верно $\varphi(n_i) = n_{i-1}$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.*

Доказательство.

Докажем, что $\varphi(n_i) = n_{i-1}$ Возьмем любое не первое число в последовательности Софи Жермен. Тогда это число имеет вид $2^l(2p+1)$, а предыдущее число имеет вид $2^l p$, где p — число Софи Жермен. Имеем $\varphi(2^l(2p+1)) = 2^{l-1}(2p+1-1) = 2^{l-1} \cdot 2p = 2^l p$.

Докажем конечность последовательности. Пусть первое число в последовательности равно $2^l p$. Тогда второе число равно $2^l(2p+1)$. Третье равно $2^l(2(2p+1)+1) = 2^l(4p+3)$. И вообще, если m-тое число имеет вид $2^l(2^{m-1}p + 2^{m-1} - 1)$, то следующее число имеет вид $2^l(2(2^{m-1}p + 2^{m-1} - 1) + 1) = 2^l(2^m p + 2^m - 2 + 1) = 2^k(2^m p + 2^m - 1)$. Таким образом, p-тое число последовательности имеет вид $2^l(2^{p-1}p + 2^{p-1} - 1)$. Однако по малой теореме Ферма, если $p \neq 2$, то $2^{p-1} - 1 \vdots p$ и, таким образом, число $2^{p-1}p + 2^{p-1} - 1 \vdots p$ и не является простым. Итак, последовательность Софи Жермен начинающаяся не с $2^l \cdot 2$ конечна. Однако в последовательности, начинающейся с $2^l \cdot 2$, шестое число равно $2^l \cdot 95$, а $95 = 5 \cdot 19$ не является простым. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\varphi(n_i) = n_{i-1}$, $n_i = 2^y n_i'$, $n_{i-1} = 2^x n_{i-1}'$, где n_i', n_{i-1}' — нечетные. Тогда, если $y > x$, то $n_{i-1} = 2^x$ и $n_i = 2^{x+1} = 2^y$.*

Доказательство. Пусть $n_i = 2^y p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}$, где p_i — нечетные простые. Тогда $\varphi(n_i) = 2^{y-1} p_1^{a_1-1} \dots p_m^{a_m-1}(p_1 - 1)\dots(p_m - 1)$. Так как все числа p_i нечетные, то $(p_i - 1)\vdots 2$. Таким образом, $\varphi(n_i) = 2^{y-1+m} n_i'' = n_{i-1} = 2^x n_{i-1}'$, где $n_i'' \in \mathbb{N}$. Однако так как $y > x$, то $y - 1 + m \leqslant x < y$ и, следовательно, $m = 0$. Значит $n_i = 2^y$. Отсюда $x + 1 = y$ и $n_{i-1} = 2^x n_i' = \varphi(n_i) = \varphi(2^y) = 2^{y-1} = 2^x$, а значит $n_i = 2^{x+1}$. □

Теорема 3. *Пусть $(n_0, \dots)$ — бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, такая что для каждого $i > 0$ выполняется $\varphi(n_i) = n_{i-1}$ и $n_0 = 1$. Тогда либо*
(I) $n_i = 2^i$, $i \in \mathbb{N}$, либо
(II) существует натуральное l, такое что $n_i = 2^i$ при $i \leqslant l$ и $n_i = 2^l 3^{i-l}$ для всех $i > l$.

Доказательство. 1) Очевидно, что последовательность вида I бесконечна. Докажем, что для каждого $i > 0$ выполняется $\varphi(n_i) = n_{i-1}$. Имеем $n_0 = 2^0 = 1$ и $\varphi(n_i) = \varphi(2^i) = 2^{i-1} = n_{i-1}$.

2) Ясно, что и последовательность вида II также бесконечна. Возьмем любую последовательность этого вида и докажем, что и в ней для каждого $i > 0$ верно $\varphi(n_i) = n_{i-1}$.

Имеем $n_0 = 2^0 = 1$. Зафиксируем произвольное натуральное l. Тогда для $i > l + 1$ получаем $\varphi(n_i) = \varphi(2^l 3^{i-l}) = 2^{l-1} 3^{i-l-1} \cdot (3 - 1) = 2^l 3^{i-l-1} = n_{i-1}$. Далее $\varphi(n_{l+1}) = \varphi(2^l 3) = 2^{i-1} \cdot (3 - 1) = 2^l = n_l$. Наконец, для $i \leqslant l$ имеем $\varphi(n_i) = \varphi(2^i) = 2^{i-1} = n_{i-1}$.

3) Докажем, что не существует других бесконечных последовательностей, таких что для $i > 0$ выполняется $\varphi(n_i) = n_{i-1}$. Предположим противное. Пусть имеется бесконечная последовательность, удовлетворяющая $\varphi(n_i) = n_{i-1}$ и не принадлежащая ни к виду I, ни к виду II, в которой $n_0 = 1 = 2^0$. Пусть n_k — наибольшее число в этой последовательности являющееся степенью 2. Такое n_k в данной последовательности существует, в противном случае последовательность принадлежит к виду I. Так как это число наибольшее, являющееся степенью двойки, то по лемме 2 степень числа 2 в разложении следующих чисел в последовательности не увеличивается. Однако степень 2 в разложении членов последовательности не может уменьшаться бесконечно, так как изначально она была конечной, а если степень 2 уменьшится до нуля то последовательность не сможет быть бесконечной, так как значение функции Эйлера всегда 1 или четное число. Значит найдется такое число в последовательности, все числа следующие за которым имеют в разложении на простые множители одинаковую степень 2^l.

Рассмотрим три идущих подряд числа в этой последовательности n_{i-1}, n_i и n_{i+1}, такие что в них и во всех следующих числах степень 2 в разложении на простые множители остается неизменной. Пусть $n_{i+1} = 2^l p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}$, где p_i — нечетные простые, и $n_i = 2^l n_i'$, где n_i' — нечетное число. Тогда $\varphi(n_{i+1}) = 2^{l-1} p_1^{a_1-1} \dots p_m^{a_m-1}(p_1 - 1)\dots(p_m - 1) = n_i$. Так как все числа p_i нечетные, $(p_i - 1)\vdots 2$. Таким образом, $\varphi(n_{i+1}) = 2^{l-1+m} n' = n_i = 2^l n_i'$. Однако $l - 1 + m \leqslant l$ и значит $m = 1$. Таким образом, $n_{i+1} = 2^l p^a$.

Последовательность не принадлежит к виду II, то есть $p \neq 3$. Пусть $a > 1$. Тогда $\varphi(n_{i+1}) = 2^{l-1} p^{a-1}(p - 1) = n_i$. Число $p - 1$ взаимно просто с p. Пусть $p - 1 = 2^t p'$. Степень 2 не изменяется и поэтому $t = 1$. Если p' является степенью двойки, то нарушается условие о неизменности степени 2, значит p' взаимно просто с 2. Однако $\varphi(n_i) = \varphi(2^l p^{a-1} p') = 2^{l-1} p^{a-2}(p-1)\varphi(p') = n_{i-1}$. Так как $\varphi(p')\vdots 2$ и $(p - 1)\vdots 2$, то $\varphi(n)\vdots 2^{l+1}$, что противоречит нашему условию о неизменности степени 2 в разложении на простые множители. Таким образом, $0 < a \leqslant 1$, то есть $a = 1$.

Возьмем следующее число в последовательности: n_{i+2}. Проведем точно такое же рассуждение и получим что $n_{i+2} = 2^l q$. Имеем $\varphi(n_{i+2}) = n_{i+1}$, то есть $\varphi(2^l q) = 2^l p$. Поэтому $2^{l-1}(q - 1) = 2^{l-1} \cdot 2p$. Отсюда $2p + 1 = q$ и значит p — это число Софи Жермен. Проведем такие же рассуждения двигаясь дальше по последовательности. Так мы выясним, что все p в других числах тоже являются числами Софи Жермен, то есть этот сегмент последовательности от n_i до бесконечности является последовательностью Софи Жермен. Однако последовательность Софи Жермен конечна по лемме 1. Таким образом, возникло противоречие из предположения, что последовательность бесконечна. Следовательно, не существует бесконечных последовательностей не принадлежащих видам I и II, в которых $n_0 = 1$. □

Следствие. *Каждая бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел* $(n_0, \ldots)$, *такая что для каждого* $i > 0$ *верно* $\varphi(n_i) = n_{i-1}$. *является сегментом последовательности, принадлежащей виду I или II из теоремы 3.*

Доказательство. Пусть последовательность $(s_0, \ldots)$ бесконечна и удовлетворяет свойству $\varphi(s_i) = s_{i-1}$ при $i > 0$. Если $s_0 = 1$, то утверждение следствия совпадает с утверждением теоремы. Пусть $s_0 \neq 1$. Тогда $\varphi(s_0) < s_0$. Многократно применяя функцию Эйлера к s_0, рано или поздно получим единицу: $\varphi^k(s_0) = 1$ для некоторого k. Возьмем наименьшее такое k. Обозначим через $n_0 = 1$, $n_1 = \varphi^{k-1}(s_0) \neq 1$, …, $n_{k-1} = \varphi^1(s_0)$, $n_k = s_0$, $n_{k+1} = s_1$, и так далее. Последовательность $(n_0, \ldots, n_{k-1}, n_k, \ldots)$ является бесконечной последовательностью, где для каждого $i > 0$ выполнено $\varphi(n_i) = n_{i-1}$ и $n_0 = 1$, которая по теореме 3 принадлежит виду I или II, а исходная последовательность $(s_0, \ldots)$ является ее сегментом. □

Список литературы

[1] Бухштаб А.А., *Теория чисел*, М.: Просвещение, 1966.

[2] Дэвенпорт Г., *Высшая арифметика*, М.: Наука, 1965.