Минимальное время получения натурального числа n из 1 путём выполнения заданных операций

К. Зюбин

Томск, МАОУ СОШ № 32, 9Б, 2020

Основная теорема. *Пусть n, k — натуральные числа, $k > 1$ и A, B — положительные действительные числа. Пусть прибавление 1 к натуральному числу занимает A единиц времени, а умножение натурального числа на k занимает B тех же единиц времени.*

Если $B \leqslant (k-1)A$, то минимальное время, необходимое для получения из 1 числа n с помощью указанных операций равно $(S-1)A + (L-1)B$, где S и L соответственно сумма цифр и длина записи числа n в k-ичной системе счисления.

Замечание: для случая $B > (k-1)A$ так же можно вывести формулу, которая даёт минимальное время для получения числа n из 1 с помощью указанных операций.

Определение 1. *Пусть A, B — фиксированные положительные действительные числа, $k > 1$. Определим для каждого натурального n число $\theta(n) = \theta_{k,A,B}(n)$ следующим образом:*

$$\theta(1) = 0, \tag{1}$$

$$\theta(kn + a) = aA + \theta(kn), \text{ где } 0 < a < k \text{ — натуральное число,} \tag{2}$$

$$\theta(kn) = \min\{B + \theta(n), A + \theta(kn-1)\}. \tag{3}$$

Заметим, что теперь доказательство Основной теоремы сводится к доказательству следующего равенства:

$$\theta(n) = (S-1)A + (L-1)B.$$

Лемма. *Пусть n — произвольное натуральное число и $B \leqslant (k-1)A$. Тогда*

$$\theta(kn) = B + \theta(n).$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n.

База индукции: $n = 1$. Из (3) имеем

$$\theta(k) = \min\{B + \theta(1), A + \theta(k-1)\}.$$

По равенству (2) получаем:

$$A + \theta(k-1) = A + (k-2)A + \theta(1) = (k-1)A.$$

По условию имеем $B \leqslant (k-1)A$. Следовательно, $\theta(k) = B + \theta(1)$. База индукции доказана.

Шаг индукции.

Из определения числа $\theta(n)$ следует, что

$$\theta(n) \leqslant A + \theta(n-1).$$

Используя данное неравенство и индукционное предположение имеем:

$$B + \theta(n) \leqslant A + B + \theta(n-1) < A + B + \theta(n-1) + (k-1)A =$$

$$A + \theta((n-1)k) + (k-1)A = A + \theta(nk-1).$$

□

Доказательство Основной теоремы. Докажем утверждение индукцией по L.

Пусть $n = a_{L-1}k^{L-1} + \ldots + a_1k + a_0$ (где $0 \leqslant a_i < k$) — запись числа n в k-ичной системе счисления. Тогда $S = a_{L-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

База индукции: $L = 1$. Тогда $n = a_0 < k$. По равенству (2) имеем

$$\theta(n) = \theta(a_0) = (a_0 - 1)A + \theta(1) = (a_0 - 1)A.$$

Шаг индукции. Пусть теорема выполняется для любого числа, у которого количество разрядов в k-ичной системе счисления меньше или равно $L - 1$. Докажем, что теорема выполняется и для чисел, у которых количество разрядов в k-ичной системе счисления равно L. По равенству (2) и Лемме имеем

$$\theta(n) = \theta(a_{L-1}k^{L-1} + \ldots + a_1 k + a_0) = \theta(k(a_{L-1}k^{L-2} + \ldots + a_1) + a_0) =$$

$$a_0 A + \theta(k(a_{L-1}k^{L-2} + \ldots + a_1)) = a_0 A + B + \theta(a_{L-1}k^{L-2} + \ldots + a_1) =$$

$$a_0 A + B + (a_1 + \ldots + a_{L-1})A + (L-2)B = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{L-1})A + (L-1)B.$$

Предпоследнее равенство справедливо по предположению индукции.

Теорема доказана. $\square$