

**Отчёт лауреата конкурса Пьера Делиня
Е.П.Вдовина за 2009 год**

В текущем году получены следующие результаты.

1. Найдены все коклики максимального размера в графах простых чисел всех конечных простых групп (совместно с А.В.Васильевым). Граф простых чисел конечной группы был предложен Грюнбергом и Кегелем (поэтому он иногда ещё называется графом Грюнберга-Кегеля) в 1979 году. Строится он следующим образом: в качестве множества вершин графа берётся множество простых делителей $\pi(G)$ порядка группы G , и две вершины r, s соединены ребром, если $r \neq s$ и в группе G существует элемент порядка rs . Граф простых чисел играет важную роль в изучении различных проблем для конечных групп, в частности, информация о его строении играет ключевую роль в, так называемой, проблеме распознаваемости по спектру. Более точно, множество порядков элементов $\omega(G)$ конечной группы G называется *спектром* группы G , и конечная группа G называется распознаваемой по спектру в классе всех конечных групп, если для произвольной конечной группы H равенство $\omega(G) = \omega(H)$ влечёт изоморфизм $G \simeq H$. Ранее в совместной работе с А.В.Васильевым изучалось строение графа простых чисел во всех конечных простых группах. В настоящей работе исправлены ошибки и неточности предыдущей работы, а также получены новые результаты о строении графа простых чисел конечных простых групп. В частности, получено описание всех коклик максимального порядка. Результаты опубликованы в виде препринта, выложены в качестве препринта в archive.org, а соответствующая статья сдана в печать.

2. Найдены классы сопряженных π -холловых подгрупп во всех конечных простых группах (совместно с Д.О.Ревиним). Далее через π всегда обозначено некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется π -холловой, если порядок подгруппы H делится лишь на простые числа из π , в то время как ее индекс в G не делится на числа из π . Понятие π -холловой подгруппы является естественным обобщением понятия силовской p -подгруппы (силовские p -подгруппы — это в точности π -холловы подгруппы для $\pi = \{p\}$). Следуя Ф.Холлу говорят, что конечная группа G обладает свойством E_π , если в ней существует π -холлова подгруппа, группа G обладает свойством C_π , если она обладает свойством E_π и все π -холловы подгруппы сопряжены, наконец группа G обладает свойством D_π , если она обладает свойством C_π и любая ее π -подгруппа содержится в некоторой π -холловой подгруппе. Таким образом свойство D_π означает полное выполнение аналога теоремы Силова для π -холловых подгрупп, в то время как свойства E_π и C_π означают выполнение более слабых аналогов теоремы Силова. Изучению π -холловых подгрупп в конечных группах посвящены сотни работ. В 2009 году найдены все классы сопряженных π -холловых подгрупп во всех конечных простых группах. Тем самым полностью завершено построение теории свойств E_π , C_π и D_π во всех конечных группах. Результаты работы сданы в печать в двух статьях (в Сибирский математический журнал и Journal of Algebra), ещё одна заключительная статья подготовлена к печати и в ближайшее время будет сдана в печать. Кроме того, для London Math.Soc. Lecture Notes подготовлена и сдана обзорная статья на эту тему.

3. Изучалась проблема существования пяти сопряженных разрешимых π -холловых подгрупп, пересечение которых совпадает с π -радикалом всей группы (совместно с В.И.Зенковым). Рассматривается следующая гипотеза: если конечная группа G содержит разрешимую π -холлову подгруппу H , то существуют пять сопряженных с H подгрупп группы G , пересечение которых совпадает с π -радикалом группы G . Отметим, что Д.С.Пассман

в 1967 году доказал, что в p -разрешимой группе G всегда существуют три силовских p -подгруппы, пересечение которых совпадает с p -радикалом группы G . Позже В.И.Зенков доказал такое же утверждение для произвольной группы. В 2005 году С.Долфи доказал, что если 2 не лежит в π , то в любой π -разрешимой группе G существуют три сопряженных π -холловых подгруппы, пересечение которых совпадает с π -радикалом группы G . Наконец, в 2008 году С.Долфи доказал, что в любой π -разрешимой группе G существуют три π -холловы подгруппы, пересечение которых совпадает с π -радикалом группы G (этот результат был также независимо получен Е.П.Вдовиным в 2007 году) Исходя из этого, естественно было предположить, что в случае произвольной конечной группы G и произвольной разрешимой π -холловой подгруппы H из G пересечение некоторых трех сопряженных с H относительно G подгрупп совпадает с π -радикалом группы G . Построен пример, показывающий, что существует конечная группа, в которой пересечение любых четырех сопряженных разрешимых π -холловых подгрупп строго содержит π -радикал всей группы. Поэтому в гипотезе предполагается существование пяти таких сопряженных подгрупп. Доказано, что минимальный контрпример к гипотезе должен быть почти простой группой, единственная минимальная нормальная подгруппа которой изоморфна конечной простой группе лиева типа. Результаты опубликованы в статье в «Трудах ИММ».

Опубликованные работы:

1. Е.Р.Vdovin, «Carter subgroups of finite groups», *Siberian Advances in Mathematics*, v. 19 (2009), № 1, 1–51. (сокращенный текст докторской диссертации).
2. Е.П.Вдовин, В.И.Зенков «О пересечении разрешимых холловых подгрупп в конечных группах», *Труды ИММ*, т. 15 (2009), № 2, 74–83. Перевод Е.Р.Vdovin, V.I.Zenkov «On the intersection of solvable Hall subgroups in finite groups», *Proc. Stekl. Inst. Math. Suppl. 1*, 2009, to appear.

Работы, сданные в печать:

1. D.O.Revin, Е.Р.Vdovin, «Existence criterion for Hall subgroups of finite groups», *Journal of Algebra*, в печати. (см. <http://arxiv.org/abs/0803.3868>)
2. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечной группе», *Сибирский математический журнал*, в печати. Перевод Е.Р.Vdovin, D.O.Revin, «Conjugacy criterion for Hall subgroups in a finite group», *Siberian mathematical journal*, to appear. (см. <http://arxiv.org/abs/0801.4206>)
3. A.V.Vasil'ev, Е.Р.Vdovin «Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group», *Algebra and Logic*, в печати (см. <http://arxiv.org/abs/0905.1164>)

Участие в конференциях:

1. Groups StAndrews, 1-15 августа, Бат, Великобритания (доклад)
2. Мальцевские чтения, 24-28 августа, Новосибирск, Россия (доклад).

Педагогическая деятельность:

Являюсь научным руководителем Алексея Альбертовича Гальта (аспирант 3-го года обучения Новосибирского госуниверситета) и Номины Чингизовны Манзаевой (магистрант 1-го года обучения Новосибирского госуниверситета). Для студентов начальных

курсов НГУ организован семинар Finite groups (совместно с В.Д.Мазуровым, А.В.Васильевым и Д.О.Ревиным), для студентов и аспирантов НГУ читаю спецкурс «Линейные алгебраические группы» (двухгодовой).