

Отчёт для фонда Династия 2011 год

Зыкин А. И.

1 Результаты, полученные в этом году

Основным направлением исследований было изучение асимптотических проблем над числовыми и функциональными полями. Изучались три основные задачи:

Изучение асимптотического поведения “в среднем” L -функций модулярных форм

Известно, что в стандартной асимптотике (деление на логарифм корня из дискриминанта) семейства абелевых расширений являются асимптотически плохими. У. Пага предпринял изучение более тонкой асимптотики для циклотомических расширений \mathbb{Q} . Более общо, он изучал средние значения для L -функций характеров Дирихле (Гекке) в случае $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_q(t)$, а также квадратичных расширений этих полей. Совместно с Р. Lebacqze было предпринято изучение ситуации в случае большей размерности. В качестве объекта изучения были взяты семейства примитивных модулярных форм относительно $\Gamma_0(N)$. Это соответствует изучению асимптотики дзета-функций модулярных кривых $X_0(N)$ при $N \rightarrow \infty$. Было доказано, что имеет место предельная формула для распределения значений L -функций модулярных форм, аналогичная формуле Ихары для характеров (но гораздо более громоздкая), в области $\operatorname{Re} s > a$ при достаточно большом a . Основные методы доказательства — тонкие аналитические оценки с использованием формулы следа Петерсона.

Построение общей асимптотической теории для L -функций в характеристике ноль

Было начато построение асимптотической теории семейств L -функций в характеристике ноль по аналогии со случаем L -функций над конечными полями. Были рассмотрены примеры семейств L -функций растущей степени, естественно возникающие в теории чисел: тензорные степени и симметрические степени L -функций, ассоциированных с модулярными формами. В предположении обобщённой гипотезы Римана были получены результаты о равномерной распределённости нулей таких L -функций на критической прямой.

Изучение башен кривых над конечными полями

Важнейшими примерами асимптотически хороших семейств кривых над конечными полями являются рекурсивные башни кривых, построенные впервые Н. Stichtenoth'ом и А. Garcia. Многие феномены, имеющие место для асимптотически хороших семейств можно выяснить с помощью изучения подобных башен. Для башен Garcia–Stichtenoth и Van der Geer–Van der Vlugt совместно с А. Зайцевым нам удалось найти первые коэффициенты разложения в ряд Тейлора дзета-функций кривых как функции от номера этажа в башне, т.е. было найдено число точек на кривых над расширениями исходного поля маленькой степени для всех этажей в башне. Основной метод получения результатов — сведение вопроса о точках на кривых к вопросу о количестве путей в графах, ассоциированных с башней.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- “On logarithmic derivatives of zeta functions in families of global fields” (with P. Lebacque), International Journal of Number Theory, Vol. 7 (2011), Num. 7.
- “Asymptotic methods in number theory and algebraic geometry” (with P. Lebacque), Publications Mathématiques de Besançon, 2011, p. 47-73.

3 Участие в конференциях и школах

- “Arithmetic days in Moscow”, 13.06–17.06, Институт Стеклова РАН, Москва (организаторы С. О. Горчинский, А. Н. Паршин, G. Wustholz) Доклад: “Asymptotic properties of zeta functions”.
- Зимняя школа НИУ ВШЭ для поступающих в магистратуру, 02.2011, Москва. Доклад: “Упаковки шаров и теория чисел”.

Организация конференций:

- “Arithmetic, Geometry and Coding Theory”, 14.03–18.03, Marseille, France (вместе с Y. Aubry и C. Ritzenthaler).
- Летняя Школа “Алгебра и геометрия”, 1.08–7.08, 2011, г. Ярославль (совместно с М. Вербицким, А. С. Тихомировым и С. А. Тихомировым).
- “Global Fields”, 25.10–28.10, Москва (совместно с P. Lebacque и М. А. Цфасманом).

4 Работа в научных центрах и международных группах

- Научный визит National Center for Theoretical Sciences, Тайвань, 15.07–27.07, 2011
Доклад: “Asymptotic properties of zeta functions”
- Научный визит в БФУ им. Канта, 1.11–11.11, 2011
Чтение курса лекций “Модулярные кривые и модулярные формы”

Доклады на семинарах в Москве:

- Московское Математическое Общество, февраль 2011
Доклад: “Асимптотические задачи в теории чисел и предельные дзета-функции”
- Семинар лаборатории алгебраической геометрии и её приложений Ф. А. Богомолова, 11.2011
Доклад: “Якобианы и абелевы многообразия над алгебраически незамкнутыми полями”.

5 Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

- Организация и доклады на семинаре “Арифметика, геометрия и теория кодирования” (совместный семинар лаборатории Poncelet–ИППИ).
- Совместные курсы НИУ ВШЭ и НМУ “Теория чисел” (2010–2011) и “Дополнительные главы теории чисел” (2011–2012).
- Ведение семинаров “Арифметика и приложения” (2010–2011) и “Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Галуа” (2011–2012) для студентов НИУ ВШЭ.
- Семинары по дискретной математике (весна 2011), анализу (весна – осень 2011), прием задач в НИУ ВШЭ.
- Руководство курсовыми работами студентов НИУ ВШЭ (7 человек).
- Являюсь куратором 2-го курса в НИУ ВШЭ.