

1. КОМБИНАТОРИКА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ: КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАЯВКИ. (Н. Ю. ЕРОХОВЕЦ)

Проект посвящён комбинаторике выпуклых многогранников. Выпуклые многогранники изучаются математиками с древнейших времён. В настоящее время теория многогранников использует методы самых актуальных областей современной математики, таких как алгебраическая геометрия, торическая топология, теории квазисимметрических функций, алгебр Хопфа, дифференциальных уравнений и др. Можно выделить три направления исследования проекта.

Проблема флаговых чисел выпуклых многогранников. Одной из вершин теории простых многогранников является g -теорема, описывающая всевозможные векторы граней простых многогранников. В частности, векторы граней удовлетворяют так называемым соотношениям Дена-Соммервилля. В случае общих выпуклых многогранников более естественно рассматривать флаговые числа многогранников, при этом проблема далека от решения даже в размерности 4. М. Байер и Л. Биллера нашли всевозможные линейные условия, которым удовлетворяют флаговые числа выпуклых многогранников. Эти условия являются аналогами соотношений Дена-Соммервилля и в случае простых многогранников сводятся к ним. В настоящее время в этой области используются такие объекты и конструкции, как cd -индекс, торический h -вектор, кольцо флаговых чисел и др.

Введённые В. М. Бухштабером кольца выпуклых многогранников позволили взглянуть на проблему флаговых чисел с новой точки зрения. Была построена производящая функция флаговых чисел многогранника, мультипликативная относительно прямого произведения. Было показано, что cd -индекс отвечает разложению многогранника по некоторому естественному базису, а торический g -полином является следствием общей алгебраической конструкции деформации умножения. Целью проекта является развитие теории дифференциальных колец выпуклых многогранников на основе методов теорий алгебр Хопфа и квазисимметрических функций, коммутативной и гомологической алгебры в направлении проблемы флаговых чисел. Планируется найти набор мультипликативных образующих кольца флаговых векторов выпуклых многогранников, а также применить конструкцию g -полинома деформации умножения к новым градуированным алгебрам, таким как кольцо комплексных кобордизмов с действием алгебры Ландвебера-Новикова.

Проблема Бухштабера. Другой важной задачей является развитие методов торической топологии в направлении комбинаторики простых многогранников. Здесь нас будут интересовать комбинаторные инварианты, различающие простые многогранники с одинаковыми f -векторами. Центральной идеей торической топологии является сопоставление простому n -мерному многограннику P с m гипергранями $(m+n)$ -мерного гладкого многообразия \mathcal{Z}_P , называемого *момент-угол многообразием* с каноническим действием m -мерного тора T^m , таким что $\mathcal{Z}_P/T^m = P$. Топологический тип пространства \mathcal{Z}_P зависит только от комбинаторики многогранника P , поэтому топологические инварианты многообразия \mathcal{Z}_P являются комбинаторными инвариантами многогранника P . На этом пути было введено число Бухштабера $s(P)$ – комбинаторный инвариант простого многогранника P , равный максимальной размерности торических подгрупп $H \simeq T^r \subset T^m$, действующих свободно на пространстве \mathcal{Z}_P . Для этого числа нетрудно было получить оценку $1 \leq s(P) \leq m - n$. Далеко не для каждого простого многогранника $s(P) = m - n$. В связи с этим в 2002 году В. М. Бухштабер поставил проблему найти алгоритм вычисления числа $s(P)$ по комбинаторике многогранника P . Планируется продолжить развитие теории комбинаторного инварианта $s(P)$, в том числе ответить на вопрос $s(P \times Q) = s(P) + s(Q)$?, а также получить новые оценки этого инварианта в терминах минимальных множеств непересекающихся гиперграней многогранника P .

Многогранники и перестановки. Третье направление исследований проекта будет посвящено развитию методов описания комбинаторики выпуклых многогранников на основе классической теории групп перестановок. В частности, планируется развить подход к комбинаторике многогранников, основанный на использовании i -перестроек и перестановок вершин, индуцируемых линейными функциями.