

Комеч Сергей Александрович: краткое изложение заявки.

Геометрическая интерпретация энтропии в теории динамических систем

Понятие энтропии, которое было введено А.Н. Колмогоровым в качестве нового метрического инварианта для сохраняющих меру преобразований вероятностных пространств, играет фундаментальную роль в эргодической теории. Главной целью наших исследований является изучение энтропии Колмогорова с геометрической точки зрения. Впервые связь энтропии с усложнением границ областей в фазовом пространстве динамической системы была установлена для марковских сдвигов на пространстве двусторонних бесконечных последовательностей со стандартной метрикой. Предположение о существовании такой связи было основано на некоторых замечаниях, сделанных в теоретической физике.

Усложнение границы понимается следующим образом. Рассматривается преобразование T пространства, сохраняющее меру. Пусть $B(x, \varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в точке x . Множество $T^n B(x, \varepsilon)$ имеет ту же меру, что и исходный шар. Изучается скорость роста логарифма отношения меры ε -окрестности образа шара за n итераций к мере исходного шара. Такую величину можно рассматривать как логарифмическую скорость деформации границы области в фазовом пространстве системы. Оказывается, что логарифм такого отношения (при определенной связи между n и ε) при $n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ растет как nh , где h — энтропия Колмогорова.

Недавно в работе автора такая связь была установлена в более широком классе символических динамических систем — в синхронизованных системах, которые содержат не только все марковские сдвиги, но и получаемые из них с помощью побуквенного кодирования так называемые софические системы (sofic systems) Вейса. Также, в работе автора подобное соотношение было установлена для гладких гиперболических систем, а именно для автоморфизмов n -мерного тора (когда объем — инвариантная мера). Дальнейшие исследования предлагается вести в следующих направлениях:

1. Установить наиболее широкий класс систем, в которых такая связь присутствует. В символической динамике это, возможно, так называемые кодируемые системы (coded systems).
2. Получить подобное соотношение для гладких гиперболических систем в общем случае и, возможно, для некоторых негиперболических систем. По-видимому, в таких системах искажение границ будет связано с показателями Ляпунова, которые, в свою очередь, имеют определенную связь с энтропией.
3. Указать класс систем, в которых такая связь отсутствует.