

РОЖДЕСТВЕНСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВСТРЕЧИ  
ФОНДА ДМИТРИЯ ЗИМИНА «ДИНАСТИЯ»

XX лет Независимому Московскому университету

8-10 января 2012 года, Москва, НМУ, конференц-зал  
Председатель: Pierre Deligne

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

**Иван Аржанцев**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

**Flexible affine algebraic varieties.** Let us say that an affine variety  $X$  is flexible if the tangent space at any smooth point on  $X$  is generated by sections of locally nilpotent vector fields. Suppose that  $\dim X > 1$ . We prove that flexibility implies that the action of the group of special automorphisms on the smooth locus of  $X$  is infinitely transitive. Many other geometric properties of flexible varieties will be discussed.

It turns out that all non-degenerate affine toric varieties as well as affine homogeneous spaces of a semisimple group  $G$  are flexible. Assume now that  $G$  acts on an affine variety  $X$  with an open orbit. We show that  $X$  is flexible provided it is smooth. Moreover, using a description of the Cox ring of a normal affine  $SL(2)$ -embedding due to V.Batyrev and F.Haddad (2008), we prove flexibility for arbitrary  $X$  and  $G = SL(2)$ .

*The talk is based on joint works with H.Flenner, S.Kaliman, F.Kutzschebauch, K.Kuyumzhiyan and M.Zaidenberg.*

**Александр Буфетов**

МИ РАН, ИППИ РАН и НИУ ВШЭ

**On the Vershik-Kerov Conjecture Concerning the Shannon-McMillan-Breiman Theorem for the Plancherel Family of Measures on the Space of Young Diagrams**

Vershik and Kerov conjectured in 1985 that dimensions of irreducible representations of finite symmetric groups, after appropriate normalization, converge to a constant with respect to the Plancherel family of measures on the space of Young diagrams. The statement of the Vershik-Kerov conjecture can be seen as an analogue of the Shannon-McMillan-Breiman Theorem for the non-stationary Markov process of the growth of a Young diagram. The limiting constant is then interpreted as the entropy of the Plancherel measure. The main result of the talk is the proof of the Vershik-Kerov conjecture. The argument is based on the methods of Borodin, Okounkov and Olshanski.

**Максим Всемиров**

Санкт-Петербургский государственный университет и ПОМИ РАН

**Задача Чэпмена о «зловещем определителе» и гипотеза Анкени-Артина-Чоулы.** В 2003 году, исследуя свойства арифметических решеток, Робин Чэпмен экспериментально обнаружил любопытные свойства определителей матриц, составленных из символов Лежандра по модулю  $p$ . Неожиданно, доказательство этих свойств оказалось довольно сложной задачей, несколько лет не поддававшейся решению. Р. Чэпмен даже назвал ее «задачей о зловещем дискриминанте». В докладе будет рассказано о доказательстве гипотез

Чэпмена. В частности, в случае  $p = 1 \pmod{4}$  ответ выражается в терминах фундаментальной единицы и числа классов вещественного квадратичного поля с дискриминантом  $p$ . Во второй части доклада будет рассказано о том, как вычисление подобных определителей дает еще один подход к (до сих пор открытой) гипотезе Анкени-Артина-Чоулы об арифметических свойствах фундаментальных единиц квадратичного поля.

### **Александр Гайфуллин**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

**Многочлены Сабитова для объемов четырехмерных многогранников.** В 1996 году И.Х.Сабитов доказал, что объём любого симплициального многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве является корнем некоторого многочлена, зависящего от комбинаторного типа многогранника, старший коэффициент которого равен 1, а остальные коэффициенты являются многочленами от длин ребер многогранника; такой многочлен называется многочленом Сабитова для многогранников данного комбинаторного типа. Подчеркнём, что многогранник не предполагается ни выпуклым, ни даже гомеоморфным шару. Одним из основных приложений теоремы Сабитова является доказательство так называемой «гипотезы о кузнечных мехах», утверждающей, что объём любого изгибаемого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве постоянен. С тех пор, как были получены эти результаты, оставался открытым вопрос о возможности их обобщения на многогранники старших размерностей. В докладе будет рассказано о недавно полученных докладчиком

аналогах теорем Сабитова для многогранников в четырёхмерном евклидовом пространстве. Будет доказано, что для любого четырёхмерного симплициального многогранника существует многочлен Сабитова и что объём любого изгибаемого четырёхмерного многогранника постоянен.

### **Вадим Горин**

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича

**Блочные характеры симметрических групп.** Характер (матричный след представления) симметрической группы  $S(n)$  зависит от перестановки через её цикловую структуру. В докладе будут обсуждены блочные характеры, которые зависят только от количества циклов в перестановке. Будет описана структура множества блочных характеров, объяснена их связь с представлением симметрической группы в алгебре коинвариантов, а также с различными комбинаторными объектами, в частности, с числами Эйлера, равными числу перестановок с данным числом «спусков». Мы также обсудим теорию блочных характеров для бесконечной симметрической группы  $S(\infty)$  и их связь с теорией представлений полных линейных групп  $GL(n, q)$  и  $GL(\infty, q)$  над конечным полем.

*Основные результаты доклада получены совместно с А. В. Гнединым.*

### **Евгений Горский**

Лаборатория Понселе и Stony Brook University

#### **DANA representations and plane curve singularities**

A theorem of Y. Berest, P. Etingof and V. Ginsburg states that finite dimensional irreducible representations of a type

$A_n$  rational Cherednik algebra are classified by one rational number  $m/n$ . It turns out that such representation is tightly related to different invariants of the plane curve singularity  $x^m = y^n$ , and, conjecturally, to the Khovanov-Rozansky homology of the corresponding torus knot. I will describe some of these relations and, in particular, explain the surprising symmetry between  $m$  and  $n$ .

**Николай Гусев**

Московский физико-технический институт

**Incompressible limit of the linearized Navier-Stokes equations** Initial-boundary value problem for linearized equations of viscous barotropic fluid motion in a bounded domain is considered. Existence, uniqueness and estimates of weak solutions to this problem are derived. Convergence of the solutions towards the incompressible limit when compressibility tends to zero is studied.

**Алексей Елагин**

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича

**Descent constructions for derived categories.** Suppose a morphism of algebraic varieties  $X$  and  $Y$  is given. For a morphism from certain class (i.e., etale covering, flat affine morphism, projective bundle, quotient over a free group action etc) the categories of coherent sheaves on  $X$  and  $Y$  are related by a natural construction: in fact, one category can be reconstructed from another one and some extra data. For instance, a coherent sheaf on  $Y$  being a relative spectrum of a sheaf of algebras  $A$  on  $X$  is the same as a sheaf of  $A$ -modules on  $X$ .

I will tell about analogs of these constructions for derived categories of coherent sheaves. All they are based on a general notion from abstract category theory: modules over a monad and on a specialization of classical Beck theorem in the case of triangulated categories.

If we consider a morphism of stacks instead of varieties, an interesting application can be obtained. It describes the derived category of  $G$ -equivariant coherent sheaves on a variety via ordinary (non-equivariant) derived category of coherent sheaves and the action of  $G$  on this category.

**Николай Ероховец**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**Деформации умножения в градуированных кольцах и торические  $g$ -полиномы** Жемчужиной теории простых выпуклых многогранников является  $g$ -теорема, формулируемая в терминах  $g$ -вектора или  $g$ -полинома многогранника. Эта теорема даёт необходимое и достаточное условие для того, чтобы данный набор целых чисел был вектором граней простого выпуклого многогранника. Эта теорема была сформулирована в качестве гипотезы П. Макмюлленом. Л. Биллера и К. Ли доказали достаточность, предъявив серию многогранников. Необходимость была доказана Р. Стенли на основе сильной теоремы Лефшеца из алгебраической геометрии. В основе этого результата лежит конструкция, которая сопоставляет простому многограннику алгебраическое торическое многообразие. Как было отмечено Г. Циглером на математическом конгрессе в 2002 в Пекине, аналогичная проблема для произвольных выпуклых

многогранников далека от решения даже в случае размерности четыре, при этом начинают играть роль так называемые флаговые числа многогранника, которые в случае простых многогранников выражаются через числа граней. Торический  $g$ -полином выпуклого многогранника вводится при помощи рекуррентной конструкции на основе идей торической геометрии. Эта конструкция была предложена А. Хованским и Р. Стенли. В настоящее время наиболее сильным результатом в этом направлении является теорема К. Кару о том, что коэффициенты  $g$ -полинома любого выпуклого многогранника неотрицательны. Новый подход к проблеме флаговых чисел был развит в работах В.М. Бухштабера, который ввёл дифференциальное кольцо выпуклых многогранников с действием алгебры Лейбница-Хопфа на нём. Это позволило привлечь богатую алгебраическую технику, включающую в себя теории алгебр Хопфа и квазисимметрических функций. В докладе будет описана функториальная алгебраическая конструкция  $g$ -полинома деформации умножения в градуированном кольце и показано, что в случае кольца выпуклых многогранников она даёт торический  $g$ -полином.

**Александр Ефимов**

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН и НМУ

**Квантовые кластерные переменные и исчезающие циклы.** В докладе будет рассказано, как получить теоретико-ходжевую интерпретацию для квантовых кластерных переменных (в кососимметрическом случае) с помощью теории Дональдсона-Томаса для колчана с потенциалом. При этом оказывается, что гипотеза положительности

сводится к некоторому утверждению о чистоте смешанных структур Ходжа на когомологиях с коэффициентами в пучке исчезающих циклов.

**Владимир Жгун**

Институт системного анализа РАН и лаборатория Понселе

**On the complexity of invariant Lagrangian subvarieties in symplectic varieties with reductive group action** (*based on joint work with D.A. Timashev.*) Let  $G$  be a reductive group over an algebraically closed field of characteristic zero, and let  $X$  be a symplectic  $G$ -variety equipped with a moment map. We prove that all  $G$ -invariant Lagrangian subvarieties of  $X$  have the same complexity and rank. We also give a calculation of the closure of the image of the moment map that generalizes well-known results on the cotangent bundles of  $G$ -varieties. We note that this is a generalization of a result of D.I.Panyushev, who proved that for a  $G$ -invariant subvariety  $Y$  of a  $G$ -variety  $X$  the conormal bundle of  $Y$  in  $X$  has the same complexity as  $X$ . In the case when the invariant Lagrangian subvariety is quasi-affine we describe the stabilizer of general position for the action on  $X$ .

**Роман Карасёв**

Московский физико-технический институт.

**A simpler proof of the Boros–Füredi–Bárány–Pach–Gromov theorem.** The main topic of this talk is:

*Problem.* Let  $d+1$  random points  $x_0, \dots, x_d$  be distributed independently in  $\mathbb{R}^d$ . Show that one point  $c \in \mathbb{R}^d$  is covered by



the simplex  $\text{conv}\{x_0, \dots, x_d\}$  with probability  $p_d$  with largest possible value of  $p_d$ .

Endre Boros and Zoltán Füredi (1984) established the best constant  $p_2 = 2/9$  when the points are distributed with the same discrete distribution.

Imre Bárány (1982) considered arbitrary dimension and random points distributed by the same discrete distribution. The constant was roughly  $p_d = (d+1)^{-d}$ . This result was obtained by partitioning the  $N$  distribution points into  $\sim \frac{N}{d+1}$  groups of  $d+1$  each by the Tverberg theorem and then applying the colorful Carathéodory theorem to every  $(d+1)$ -tuple of  $(d+1)$ -tuples.

János Pach (1998) considered arbitrary dimension and points distributed with different discrete distributions. The constant  $p_d$  was approximately  $\frac{1}{(5d)^{d^2}(d+1)}$ .

In case of the same discrete distribution for all points Uli Wagner (2003) has improved the bound to  $p_d = \frac{d^2+1}{(d+1)^{d+1}}$ .

Recently Mikhail Gromov (2010) has developed a topological approach to estimating multiplicity of maps, in particular, giving a better bound  $p_d = \frac{1}{(d+1)!}$  for the probability of covering by the convex hull, which improves to  $p_d \geq \frac{2d}{(d+1)!(d+1)}$  when some two points have the same distribution.

Gromov actually proved a much stronger result: Instead of several finite point sets in  $\mathbb{R}^d$  one can consider a continuous map of the join of  $d+1$  finite sets to  $\mathbb{R}^d$  (or the  $d$ -skeleton of large enough simplex) and study covering by the images of faces of maximal dimension under this map. But we will not consider such generalizations here.

The proof of Gromov is not easy to understand. It used an abstract notion of the space of cocycles. Moreover, the space of cocycles was defined as a simplicial set, which is even harder to imagine.

In this talk we are going to decipher Gromov's proof and make it almost elementary and very short.

### **Валентина Кириченко**

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

**Divided difference operators on polytopes.** Divided difference operators (or Demazure operators) play a key role in Schubert calculus and representation theory. I will talk about convex geometric analogs of Demazure operators (*joint work with Evgeny Smirnov and Vladlen Timorin*). Geometric Demazure operators act on polytopes and take a polytope to a polytope of dimension one greater. For instance, Gelfand-Zetlin polytopes can be obtained by applying a suitable composition of geometric Demazure operators to a point.

### **Каринэ Куюмжиян**

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений; Лаборатория Понселе и Независимый Московский университет

**Varieties with infinitely transitive action of the group of Special Automorphisms.** Let  $X$  be an affine algebraic variety, and let  $Aut(X)$  be the group of its algebraic automorphisms. We say that the action of  $Aut(X)$  on  $X$  is infinitely transitive if for every integer  $m$  it is transitive on  $m$ -tuples of pairwise distinct smooth points of the variety.

The class of such varieties  $X$  is rather poor. The simplest example of such  $X$  is the affine space  $A^n$  for  $n > 1$ . Since it is not easy to work with  $Aut(X)$ , in our proofs we use only the so-called special automorphisms, i.e. those which can be described in terms of locally nilpotent derivations of the algebra of functions  $k[X]$ . A recent result of Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutzschebauch and Zaidenberg shows that every variety with the infinitely-transitive action of the group of special automorphisms is unirational. However, there are some non-rational examples. In the talk, we will discuss different examples of varieties with this property, constructed in the joint work with Arzhantsev and Zaidenberg. We show infinite-transitivity for non-generate affine toric varieties of dimension  $> 1$ , normal affine cones over flag varieties  $G/P$  and the so-called suspensions over varieties, already having this property. The last series of examples works also over the ground field  $\mathbb{R}$ .

**Ольга Никольская**

Владимирский государственный университет

**Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств  $K3$  поверхностей** Доказаны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза типа Лефшеца для расслоенного квадрата гладкого проективного неизотривиального семейства  $K3$  поверхностей над гладкой проективной кривой при условии, что ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое семейства является нечетным простым числом. Гипотеза Ходжа доказана для расслоенного произведения двух неизотривиальных семейств  $K3$  поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной

кривой  $C$  при условии, что для любой точки  $s$  кривой хотя бы один из слоев семейств над этой точкой не имеет особенностей, ранг решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое первого семейства является нечетным числом, отличным от ранга решетки трансцендентных циклов на общем геометрическом слое второго семейства.

### **Сергей Облезин**

Институт теоретической и экспериментальной физики

**Параболические функции Уиттекера и квантовые когомологии пространств флагов.** В докладе будет рассказано о новых результатах, полученных в рамках теоретико-представленческого подхода к изучению квантовых когомологий однородных пространств. Основным объектом в докладе будет новый класс специальных функций на группе  $GL(N, R)$ , – параболические функции Уиттекера, связанных с пространством (неполных) флагов  $GL(N)/P$ . Предположительно эти функции являются производящими функциями квантовых когомологий соответствующих пространств флагов. В докладе будут обсуждаться связи параболических функций Уиттекера с известными симметрическими функциями, а также интегральные представления для этих функций, и связь с зеркальной симметрией для пространств флагов.

### **Тарас Панов**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

**Intersections of quadrics and  $H$ -minimal Lagrangian submanifolds** (*a joint work with Andrey Mironov*). We study the topology of Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds  $N$  in  $C^m$  constructed from intersections of real

quadrics in the work Mironov. This construction is linked via an embedding criterion to the well-known Delzant construction of Hamiltonian toric manifolds.

We establish the following topological properties of  $N$ : every  $N$  embeds as a submanifold in the corresponding moment-angle manifold  $Z$ , and every  $N$  is the total space of two different fibrations, one over a torus with fibre a real moment-angle manifold  $R$ , and another over a quotient of  $R$  by a finite group (known as a small cover) with fibre a torus. These properties are used to produce new examples of  $H$ -minimal Lagrangian submanifolds with quite complicated topology. The interpretation of our construction in terms of symplectic reduction leads to its generalisation providing new examples of  $H$ -minimal submanifolds in toric varieties.

Reference: Andrey Mironov and Taras Panov. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds, and Hamiltonian-minimal Lagrangian embeddings. Preprint (2011); arXiv:1103.4970.

### **Леонид Посицельский**

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича  
и Независимый Московский университет

**Exotic derived categories of matrix factorizations.** I will define derived categories of the second kind for various classes of matrix factorizations of a potential on a (singular, nonaffine) noetherian scheme and state the presently known results about relations between these categories (the most remarkable of which is the covariant Serre-Grothendieck duality). Time permitting, I will also comment on the relations

between derived categories of matrix factorizations and triangulated categories of singularities.

**Владимир Протасов**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

**Совместные спектральные характеристики линейных операторов.** Совместные спектральные характеристики данного семейства линейных операторов: это показатели асимптотического роста усредненной нормы их произведений. Вид характеристики зависит от способа усреднения. Так, совместный спектральный радиус (Рота, Стрэнг, 1960) отвечает за рост максимальной нормы произведений данной длины, 1-радиус (Вонг, Лау 1995) – за среднее арифметическое норм, нижний спектральный радиус (Гурвиц, 1995) – за минимальную норму, показатель Ляпунова (Фюрстенберг, Кестен, 1960) – за показатель роста с вероятностью 1, и т.д. Для одного оператора все эти показатели совпадают с обычным спектральным радиусом. Совместные спектральные характеристики нашли множество применений в теории функций, теории всплесков (вейвлетов), динамических системах, теории кодирования, теории чисел, теории вероятностей, комбинаторике и т.д. Особенно интересен вопрос об их вычислении и оценивании для конкретных семейств операторов. Известно, что задача эта чрезвычайно сложная. Для булевских матриц она  $NP$ -сложна, а для общих матриц – алгоритмически неразрешима. Тем не менее, в последние годы появилось несколько эффективных алгоритмов вычисления. В докладе будут представлены несколько подходов к этой задаче, включая самые свежие результаты, а также показаны некоторые приложения.

**Михаил Скопенков**  
ИППИ РАН, KAUST

**Задача о граничных значениях для дискретных аналитических функций** В ряде задач статистической физики, дискретной дифференциальной геометрии, численных методов естественным образом возникает понятие дискретной аналитической функции, принадлежащее Р. Исааксу, Р. Даффину и Х. Мерка. Рассмотрим граф, лежащий в комплексной плоскости и имеющий только четырехугольные грани. Функция, заданная в вершинах этого графа, называется дискретной аналитической, если для каждой грани ее разностные отношения вдоль двух диагоналей равны.

Мы доказываем, что задача Дирихле о граничных значениях для действительной части дискретной аналитической функции имеет единственное решение. В случае, когда каждая грань имеет перпендикулярные диагонали, мы доказываем, что это решение сходится к гармонической функции в непрерывном пределе (при некоторых предположениях регулярности). Данный результат решает проблему, поставленную С. Смирновым в 2010 году. Этот результат был доказан ранее в частном случае квадратной решетки Р. Курантом, К. Фридрихсом, Х. Леви (1928), и для ромбической решетки С. Смирновым, Д. Челкаком (2008).

В частности, данный результат доказывает сходимостъ для задачи Дирихле на триангуляции Делоне, что решает проблему, поставленную А. Бобенко. Доказательство основано на энергетических соображениях, подсказанных теорией цепей переменного тока.

**Олег Стырт**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

**О простейших стационарных подалгебрах для компактных линейных алгебр Ли.** Доказано, что любая неприводимая компактная линейная алгебра Ли с простым коммутантом обладает точкой со стационарной подалгеброй ранга 1, за исключением присоединённых линейных алгебр, классических линейных алгебр и их внешних квадратов, возможно, пополненных одномерной алгеброй скалярных операторов, и ещё нескольких (порядка трёх десятков) линейных алгебр. Ожидается, что этот результат будет полезен для решения задачи нахождения всех компактных линейных групп с факторпространством, гомеоморфным клетке, исходя из уже разобранных случая коммутативных и простых трёхмерных групп. В докладе планируется сказать несколько слов об основной идее доказательства, аналогичной использованному в [1] методу нахождения точек, имеющих замкнутую орбиту и стабилизатор ранга 1, для комплексных редуктивных линейных групп Ли.

[1] V.G.Кас, V. L.Popov, E.B.Vinberg, Sur les groupes line'aires alge'briques dont l'alge'bre des invariants est libre, C.R.Acad.Sci., Paris, 1976, 283, 875-878.

**Владлен Тиморин**

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

**Matings, captures and regluing.** (*a joint project with I. Mashanova*) Mating is an operation that produces topological models for rational functions out of polynomials. In



parameter slices of quadratic rational functions, we identify arcs represented by matings of quadratic polynomials. These arcs are on the boundaries of hyperbolic components.

**Алексей Устинов**

Институт прикладной математики ДВО РАН

**Геометрическое доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса.** В докладе будет рассказано наглядное доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса, основанное на геометрической интерпретации цепных дробей.

**Евгений Фейгин**

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

**Вырожденные представления и многообразия флагов типа  $A$ .** Рассмотрим фильтрацию Пуанкаре-Биркгоффа-Витта на неприводимом представлении алгебры Ли  $sl(n)$ . Соответствующее присоединённое градуированное пространство является представлением вырожденной алгебры Ли. Мы опишем структуру этого представления. Кроме того, мы определим многообразия флагов для вырожденной группы  $SL(n)$ , приведём явную конструкцию для этих многообразий в терминах линейной алгебры и опишем их алгебро-геометрические и топологические свойства.

**Дмитрий Челкак**

ПОМИ РАН и лаборатория им. П.Л.Чебышева СПбГУ

**Дискретный комплексный анализ на микроуровне: конформные инварианты без конформной инвариантности.**

Хорошо известно, что односвязная область на плоскости с четырьмя отмеченными граничными точками, с точностью до конформных отображений, полностью характеризуется одним вещественным параметром (модулем четырехсторонника). При этом можно рассматривать разные «параметризации» (конформные инварианты) таких конфигураций: двойные отношения, экстремальные длины семейства кривых, соединяющих противоположные стороны, и т. п., которые однозначно выражаются друг через друга.

В докладе пойдет речь о дискретных величинах, являющихся аналогами таких конформных инвариантов для дискретных односвязных областей (подмножеств квадратной решетки или других планарных графов) с четырьмя отмеченными граничными точками. Ясно, что надеяться получить точные формулы, связывающие разные параметры области, в этом случае невозможно. Тем не менее, такие тождества можно заменить достаточно хорошими двусторонними оценками, что позволяет применять классические методы теории функций комплексной переменной, «оставаясь на микроуровне» и не заботясь о геометрии рассматриваемой области, которая может иметь множество узких фьордов и «бутылочных горлышек».

Одним из простейших приложений развитой техники является дискретная версия классической оценки (восходящей к Карлеману), утверждающая равномерную экспоненциальную малость вероятности достижения случайным блужданием удаленной части границы области в терминах суммы обратных ширин соответствующего фьорда.