

Отчет 2013

Щуров Илья Валерьевич

Полученные результаты

Быстро-медленные отображения

Быстро-медленной системой называется семейство дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где ε — малый параметр, переменная x называется быстрой, переменная y — медленной.

Естественным аналогом быстро-медленных систем среди динамических систем с дискретным временем являются итерации отображений вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + f(x, y, \varepsilon) \\ y + \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Получено продвижение в исследовании быстро-медленных отображений. Совместно с Ю.С.Ильяшенко разработан и частично реализован план доказательства теоремы о срыве в быстро-медленных отображениях, аналогичной классической теореме о срыве Понтрягина—Мищенко в быстро-медленных системах с непрерывным временем.

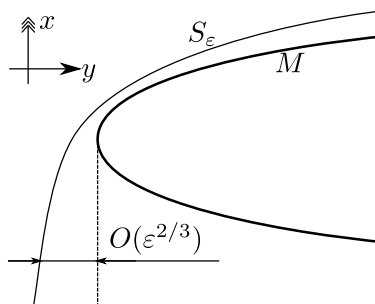


Рис. 0.1: Точка срыва и асимптотика инвариантной кривой. Горизонтальная ось соответствует медленному движению, вертикальная — быстрому

Теорема. Пусть медленная кривая $M := \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$ имеет невырожденную складку в точке $(0, 0)$. Вблизи устойчивого участка медленной кривой

существует инвариантная кривая S_ε , продолжаемая за точку срыва. Расстояние от медленной кривой до точки срыва вдоль оси медленного движения имеет асимптотику $O(\varepsilon^{2/3})$, см. рис. 0.1

Геометрическое доказательство этой теоремы опирается на технику раздутия, разработанную в этом контексте Дюмортье и Руссари [1] и дополнительно развитую другими авторами (см. в частности [2]). Прямое применение этой техники к отображениям вместо дифференциальных уравнений оказывается невозможным, поскольку её ключевым элементом является гладкая замена времени. В то же время, оказывается возможным вложить быстро-медленное отображение в поток быстро-медленной системы в специальных областях, соответствующих различным картам раздутия, с помощью перехода к надстройке, применению теории усреднения и гомотопического метода. После этого доказательство теоремы о срыве проводится стандартными геометрическими методами.

Статья находится в стадии подготовки.

Быстро-медленные системы на торе

В серии работ [3, 4, 5] автором были исследованы быстро-медленные системы на двумерном торе со стягиваемой связной невырожденной медленной кривой. Было доказано, что количество циклов, совершающих один обход вдоль медленной координаты, оценивается сверху числом точек складок медленной кривой.

В результате исследования уравнения, моделирующего динамику системы с Джозефсоновскими контактами и периодическим возмущением [7], было замечено, что в этой модели появляются быстро-медленные системы на торе с нестягиваемыми медленными кривыми. При этом в силу специального вида уравнения, число предельных циклов, совершающих один обход вдоль медленной координаты, не превосходило двух.

Автором была сформулирована гипотеза, что в случае быстро-медленной системы на торе общего вида с нестягиваемыми медленными кривыми возможно появление сколь угодно большого (конечного) числа предельных циклов. Механизмом этого появления является совпадение устойчивого и неустойчивого многообразий.

Совместно с Н.А.Солодовниковым было получено продвижение в доказательстве этого утверждения. А именно, проанализированы так называемые вырожденные траектории и решена комбинаторно-геометрическая задача, являющаяся первым шагом на пути построения примера быстро-медленной системы со сколь угодно большим числом предельных циклов.

Также было обнаружено, что аналогичный результат имеет место для предельных циклов, совершающих два и более обхода вдоль направления медленного движения.

Статья в стадии подготовки.

Научные работы

Опубликован препринт [6] (совместно с А. Глуцюком, В. Клепцыным, Д. Филимоновым), принят к печати в «Функциональный анализ и его приложения». Опубликована статья [7] (совместно с О. Ромаскевич, В. Клепцыным).

Участие в конференциях и школах

1. Летняя школа «Динамические системы», Москва, Ратмино, 20 июня — 2 июля 2013. Прочитан миникурс (3 лекции) по быстро-медленным системам и отображениям.
2. Летняя школа «Recent trends in dynamical systems», Murcia, 28 January 2013 - 01 February 2013.
3. Workshop on Slow-Fast Dynamics: Theory, Numerics, Application to Life and Earth Sciences. Bellaterra (Barcelona). June 3 to 7, 2013.
4. New Trends in Dynamical Systems. 1-5 October 2012 at Salou, Catalonia, Spain.

Работа в научных центрах и международных группах

Автор является активным участником и одним из организаторов научного семинара под руководством Ю. С. Ильяшенко, объединяющего специалистов в области динамических систем из России, Франции, Швеции, США и др. стран. В 2013 году автором были совершены две командировки для совместной работы с зарубежными специалистами: в Стокгольм (КТН) и США (Cornell University), не считая конференций и семинаров, перечисленных в предыдущем разделе.

Педагогическая деятельность

Автором ведутся занятия в НИУ ВШЭ (лекции и/или семинары) по математическому анализу, теории вероятностей, дискретной математике, линейной алгебре и теории игр для студентов социальных и экономических специальностей. В 2012-13 учебном году автор вёл семинары по дифференциальным уравнениям для студентов совместного бакалавриата ВШЭ-РЭШ. В осеннем семестре 2013-14 учебного года автор также ведёт семинары по курсу «Динамические системы» на Факультете инноваций и высоких технологий МФТИ.

Список литературы

- [1] Dumortier, F. and Roussarie, R. Canard cycles and center manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., 121:**577**, 1996.
- [2] Krupa, M., Szmolyan, P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points — fold and canard points in two dimensions SIAM J. Math. Anal., 33:**2**, 286–314.
- [3] I. V. Schurov Ducks on the torus: existence and uniqueness. Journal of Dynamical and Control Systems, **16**:2 (2010), 267–300, arXiv: 0910.1888
- [4] Щуров И. В. Уточненные циклы в типичных быстро-медленных системах на торе Труды ММО, 2010. Т. 71. С. 200—234
- [5] Schurov, I. Duck farming on the two-torus: multiple canard cycles in generic slow-fast systems Discrete and continuous dynamical systems, **Supplement 2011** 1289—1298, arXiv:1008.0133.
- [6] Alexey Glutsyuk, Dmitry Filimonov, Victor Kleptsyn, Ilya Schurov. On the adjacency quantization in the equation modelling the Josephson effect. To appear in Functional Analysis and Its Applications. arXiv:1301.7159 [math.DS]
- [7] Клепцын В. А., Ромаскевич О. Л., Щуров И. В. Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Т. 8. № 1. С. 31-46.