

Для фонда Дмитрия Зимина «Династия»  
Отчет за 2015 год  
Конкурс молодых математиков – подпрограмма 2.1

Зотов Андрей Владимирович

«Уравнения Пенлеве-Шлезингера, интегрируемые системы и конформные теории поля»

**1. Результаты, полученные в этом году.**

- 1.1. В [2.1] описаны аналоги уравнений Янга-Бакстера с двумя постоянными планка, которые являются следствиями ассоциативного уравнения Янга-Бакстера, а также условия унитарности и антисимметричности. В частном случае полученные уравнения воспроизводят само уравнение Янга-Бакстера, играющее ключевую роль в квантовом методе обратной задачи рассеяния, квадратичных квантовых алгебрах (включая квантовые группы) и других приложениях, а также второе кубическое по  $R$ -матрице тождество, которое в частности гарантирует коммутативность связностей Книжника-Замолодчикова-Бернара. Результаты обобщены на случай (симметричных)  $R$ -матриц, в которых зависимость от спектрального параметра и постоянной Планка симметричны.
- 1.2. В теории интегрируемых систем известно явление  $r$ - $q$  дуальности между многочастичными моделями разных типов. Наиболее общей и до сих пор плохо изученной является двойная эллиптическая система. Зависимость гамильтонианов от импульсов в такой системе эллиптическая. Известная гипотеза предсказывает, что гамильтонианы этой модели задаются тета-функцией старшего рода. В [2.2] были получены тождества на тета-константы, следующие из этой гипотезы. В случае рода 3 полученные тождества доказаны.
- 1.3. Описана общая конструкция интегрируемых волчков, связанных с интегрируемыми системами частиц и их спиновыми обобщениями [2.3]. Конструкция предполагает естественное обобщение интегрируемой классической механики сразу в нескольких важных направлениях: уравнения измонодромных деформаций (уравнения Пенлеве-Шлезингера), солитонные  $1+1$  уравнения и уравнения Книжника-Замолодчикова-Бернара в конформной теории поля.
- 1.4. Квантово-классическая дуальность между классическими интегрируемыми системами частиц и квантовыми спиновыми цепочками обобщена до соответствия, в котором вместо одной спиновой цепочки с группой симметрии  $GL(N)$  участвует семейство суперсимметричных спиновых цепочек с супергруппами  $GL(N|0)$ ,  $GL(N-1|1)$ , ...,  $GL(0|N)$ . Таким образом одна система частиц типа Русенаарса-Шнайдера и фиксированное лагранжево подмногообразие в его фазовом пространстве задает целый набор цепочек и определяет их параметры и спектр квантовых гамильтонианов [2.4].

## 2. Опубликованные и поданные в печать работы.

2.1 A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Yang-Baxter equations with two Planck constants", [arXiv:1507.0261](https://arxiv.org/abs/1507.0261), J.Phys. A: Math. Theor., to appear in Exactly Solved Models and Beyond: a special issue in honour of R.J.Baxter's 75-th birthday

2.2. G. Aminov, H. W. Braden, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, "Seiberg-Witten curves and double-elliptic integrable systems", *JHEP*, **01** (2015), 033 , 15 pp., arXiv: [1410.0698](https://arxiv.org/abs/1410.0698) [Math-Net.Ru](#) [crossref](#)  
[MathSciNet](#) [WEB OF SCIENCE™](#) [eLIBRARY.RU](#) [Scopus](#)

2.3. G. Aminov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Classical integrable systems and Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations", *Письма в ЖЭТФ*, **101**:9 (2015), 723–729 [Math-Net.Ru](#) [crossref](#)  
[eLIBRARY.RU](#); G. Aminov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Classical integrable systems and Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations", *JETP Letters*, **101**:9 (2015), 648–655 [crossref](#)  
[WEB OF SCIENCE™](#) [Scopus](#)

2.4. Zengo Tsuboi, Anton Zabrodin, Andrei Zotov, "Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems", *JHEP*, **05** (2015), 086 , 43 pp., arXiv: [1412.2586](https://arxiv.org/abs/1412.2586) [Math-Net.Ru](#) [crossref](#)  
[WEB OF SCIENCE™](#) [eLIBRARY.RU](#) [Scopus](#) [crossref](#)

## 3. Участие в конференциях и школах.

3.1. Доклад "Квантовые R-матрицы, многомерные пары Лакса и уравнения Книжника–Замолодчикова–Бернара", семинар "Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика", Независимый московский университет, 6 марта 2015 г.

3.2. Доклад "R-матрично-значные пары Лакса и уравнения КЗВ", ИТЭФ, 20 апреля 2015 г.

3.3. Доклад "Ассоциативные уравнения Янга–Бакстера и интегрируемые системы", ИПИ РАН, Семинар Лаборатории квантовой физики и информации "Интегрируемые структуры в статистических и полевых моделях", 22 октября 2015 г.

## 4. Работа в научных центрах и международных группах.

## 5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство).

5.1 Курс «Теория групп и представлений», Московский физико-технический институт, Факультет общей и прикладной физики, кафедра «Теоретическая астрофизика и квантовая теория поля», 2-ой курс (весенний семестр)

5.2 Спецсеминар «[Методы классических и квантовых интегрируемых систем](#)» для студентов и аспирантов, МИАН им. В.А. Стеклова РАН.

5.3 Научное руководство: 2 аспиранта и 3 студента МФТИ.

## **6. Краткие итоги проекта (трех лет) .**

Цели и задачи проекта в основном выполнены. Как на уровне общих конструкций, так и на уровне явных примеров достигнуто понимание единообразного описания широкого круга задач математической физики, включающего важнейшие классы интегрируемых систем классической механики, уравнения Пенлеве и системы Шлезингера, уравнения Книжника-Замолодчикова (-Бернара) на конформные блоки в конформных теориях, а также 1+1 теоретико-полевые модели, обладающие солитонными решениями. Этот результат классификационный. Он позволяет предсказывать как само наличие, так и разного рода свойства целой цепи задач по одному его звену.

Вторым важным результатом проекта стало обнаружение и исследование классическо-квантового соответствия в широком смысле. Оно имеет несколько различных проявлений. Если на момент начала проекта был известен результат, связывающий классические и квантовые уравнения Пенлеве, то подводя промежуточный итог, можно говорить уже о ряде подобных явлений. С одной стороны было доказано явное соответствие между классическими системами частиц и квантовыми цепочками, с другой – обнаружены R-матрично значные обобщения классических пар Лакса, где постоянная Планка выполняет роль спектрального параметра. При этом тензорная структура оператора Лакса очень схожа со структурой уравнений Книжника-Замолодчикова в конформных теориях. Изучить эти явления детально и объяснить их появление и взаимосвязи является целью будущих исследований.

А.В. Зотов

04 декабря 2015 г.