

**Отчет за 2016 год  
по гранту фонда "Династия" для молодых математиков  
Баранова Антона Дмитриевича**

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2016 ГОДУ

В 2016 году завершена работа над заявленной в проекте задачей об устойчивости характеристик роста пространств целых функций де Бранжа при малых возмущениях спектральной меры (совместно с Х. Ворачеком, Венский Технический Университет). Получены результаты об устойчивости порядка и типа цепочек пространств де Бранжа относительно малых возмущений. Эти результаты существенно обобщают результаты для экспоненциального типа, полученные А. Боричевым и М. Содиным (2011).

Напомним основной результат этой работы. Сформулируем точное утверждение. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  две функции роста, а  $\mu, \tilde{\mu}$  – меры на  $\mathbb{R}$ , причем  $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{(1+|t|)^N} dt$  конечен для некоторого  $N > 0$ . Мы говорим, что мера  $\mu$  мажорирует меру  $\tilde{\mu}$  (и пишем  $\tilde{\mu} \preceq \mu$ ) относительно функций роста  $\lambda_1, \lambda_2$ , если существуют константы,  $c_0, c_2 \geq 0, c_1 \geq 1$  такие что для всех  $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\mu}((x - e^{-\lambda_1(|x|)}, x + e^{-\lambda_1(|x|)})) \leq c_0 \mu((x - c_1 e^{-\lambda_1(|x|)}, x + c_1 e^{-\lambda_1(|x|)})) + c_2 e^{-\lambda_2(|x|)}.$$

**Теорема о росте.** Пусть  $\mu$  и  $\tilde{\mu}$  – две меры на  $\mathbb{R}$ , и пусть  $\{\mathcal{H}_t\}_{0 < t < L}$  и  $\{\tilde{\mathcal{H}}_s\}_{0 < s < \tilde{L}}$  – цепочки пространств де Бранжа, изометрически вложенные в  $L^2(\mu)$  и  $L^2(\tilde{\mu})$  соответственно.

Предположим, что все пространства  $\mathcal{H}_t$  имеют конечный тип  $\sigma$  относительно приближенного порядка  $\lambda$ . Далее, предположим, что мера  $\mu$  мажорирует меру  $\tilde{\mu}$  относительно функций роста  $\lambda_1 = 2\sigma'\lambda$ , где  $\sigma' > \sigma$ , и  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ . Тогда либо объединение всех пространств  $\tilde{\mathcal{H}}_s$  всюду плотно в  $L^2(\mu)$ , либо среди пространств  $\tilde{\mathcal{H}}_s$  есть пространства, не имеющие тип  $\sigma$  относительно  $\lambda$ .

Как следствие мы получаем следующий результат о совпадении цепочек де Бранжа.

**Теорема о совпадении.** Если обе цепочки пространств де Бранжа  $\{\mathcal{H}_t\}_{0 < t < L}$  и  $\{\tilde{\mathcal{H}}_s\}_{0 < s < \tilde{L}}$  имеют тип не выше  $\sigma$  относительно  $\lambda$ ,  $\tilde{\mu} \preceq \mu$  и  $\mu \preceq \tilde{\mu}$  относительно функций роста  $\lambda_1, \lambda_2$ , выбранных выше, то цепочки подпространств совпадают.

Статья сдана в печать в Journal of Functional Analysis, препринт (71 стр.) доступен по адресу <http://www.asc.tuwien.ac.at/preprint/2016/asc27x2016.pdf>.

Совместно с Д.В. Якубовичем построена функциональная модель одномерных возмущений нормальных операторов с дискретным спектром. А именно, показано, что всякое одномерное возмущения нормального оператора с простым дискретным спектром  $T = \{t_n\} \subset \mathbb{C}$  унитарно эквивалентно модельному оператору  $M_G$  в гильбертовом пространстве целых функций  $\mathcal{H}(T, A, \mu)$ . Здесь  $\mu = \sum_n \mu_n$  – дискретная

мера такая, что  $\sum_n |t_n|^{-2\mu_n} < \infty$ ,  $A$  – целая функция, множество нулей которой совпадает с  $T$ ,

$$\mathcal{H}(T, A, \mu) = \left\{ F(z) : A(z) \sum_n \frac{c_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} : \|F\| = \|\{c_n\}\|_{\ell^2} < \infty \right\},$$

а оператор  $M_G$  задан на своей области задания  $D(M_G)$  как

$$M_G F = zF - c_F G, \quad D(M_G) = \{F : zF - c_F G \in \mathcal{H}(T, A, \mu)\}.$$

На основе этой модели получены результаты о полноте и спектральном синтезе для одномерных возмущения нормальных операторов, то есть, иначе говоря, о полноте и наследственной полноте систем воспроизводящих ядер в пространствах  $\mathcal{H}(T, A, \mu)$ . Найдены достаточные условия полноты системы воспроизводящих ядер в терминах роста порождающей функции такой системы и локализации точек спектра. Для широкого класса спектральных данных  $T, \mu$  построены примеры ненаследственно полных систем воспроизводящих ядер. В частности показано, что каждая полная система воспроизводящих ядер является наследственно полной в том и только том случае, когда множество  $T$  лакунарно, а последовательность масс  $\mu_n$  допускает экспоненциальную оценку снизу. Также получены условия, гарантирующие наследственную полноту любой полной системы воспроизводящих ядер точностью до конечномерного ортогонального дополнения. Полученные результаты обобщают полученные ранее результаты для пространств де Бранжа, то есть для случай вещественного спектра (А. Баранов, Ю Белов, А. Боричев, *Geometric and Functional Analysis*, 2015 и А. Баранов, Д. Якубович, *Advances in Mathematics*, 2016). Следует отметить, что в случае невещественного спектра возникают принципиальные трудности, связанные с отсутствием аналога теории Крейна. Работа с изложением этих результатов принята к публикации в журнале Алгебра и анализ (Saint Petersburg Mathematical Journal).

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАВАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

- [1] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich, Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators, *Advances in Mathematics*, 302 (2016), 740–798.
- [2] A.D. Baranov, J.J. Carmona, K.Yu. Fedorovskiy, Density of certain polynomial modules, *Journal of Approximation Theory*, 206 (2016), 1–16.
- [3] A. Baranov, A. Lishanskii, Hypercyclic Toeplitz Operators, *Results in Mathematics*, 70 (2016), 3, 337–347.
- [4] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich, Функциональная модель одномерных возмущений нормальных операторов и ее приложения, *Алгебра и Анализ*, 2017, принята к печати.
- [5] A. Baranov, H. Woracek, Stability of order and type under perturbation of the spectral measure, Preprint nr. 27/2016, Technische Universität Wien, <http://www.asc.tuwien.ac.at/preprint/2016/asc27x2016.pdf>, подана в *Journal of Functional Analysis*.

### 3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

Был выбран приглашенным докладчиком 7 Европейского Математического Конгресса (7 European Congress of Mathematics), 18-22 июля 2016, Берлин, сайт конференции: <http://www.7ecm.de>

Приглашенный доклад "Spectral synthesis in Hilbert spaces of entire functions" (45 мин.)

Также выступал с докладами на следующих конференциях:

- Конференция "Probabilistic harmonic analysis and spectral theory", 11-15 июля 2016, Стокгольм, сайт конференции: <http://www.mittag-leffler.se/konferens/probabilistic-harmonic-analysis-and-spectral-theory>  
"Sampling, interpolation and Riesz bases in small Fock spaces" (приглашенный доклад, 50 мин.)
- Школа-конференция <Various aspects of mathematical physics>, 8-11 августа 2016, Санкт-Петербург, сайт конференции: <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2016/VAMP/index.html>  
"Spectral synthesis for operators and systems"(приглашенная лекция, 90 мин.)
- Конференция "Operators on spaces of holomorphic functions", 16-19 ноября 2016, Тулуза, Франция, сайт конференции: <http://www.cimi.univ-toulouse.fr/analysis/en/week5/>  
"Spectral synthesis in the space of infinitely-differentiable function" (приглашенный доклад, 75 мин.)

Принимал участие (как член организационного комитета) в организации:

- Международная конференция "25th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis: Tribute to Victor Havin, 1933-2015", 25-30 июня 2016, Санкт-Петербург, Россия, сайт конференции: <http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma25/>
- Международная школа-конференции "Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2016)", 17-20 октября 2016 года, <http://www.chebyshev.spbu.ru/sasfi2016/>

### 4. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Прочитаны курсы "Функциональный анализ" для студентов магистратуры (программа "Математика") и для студентов 3 курса (программа "Фундаментальная математика и механика"), Санкт-Петербургский государственный университет, весенний и осенний семестры. Руководжу спецсеминаром "Дополнительные главы комплексного анализа", Санкт-Петербургский государственный университет, осенний семестр.