

Отчет по гранту фонда “Династия” за 2016 год

П. Б. Затицкий

1 Результаты, полученные в 2016 году.

В 2016 году были продолжены исследования по двум независимым темам. Первая из них связана с изучением динамических систем, вторая — с применением метода фнукции Беллмана в задачах анализа.

1.1 Универсальная адическая реализация и масштабирующая энтропия

В работе [4] обсуждался вопрос возможности универсальной адической реализации автоморфизма. Возможность построить так называемую адическую реализацию произвольного эргодического автоморфизма была доказана А. М. Вершиком в начале 80-х. А именно, было доказано, что для любого эргодического автоморфизма T пространства Лебега–Рохлина (X, μ) можно найти такие градуированный граф Γ (диаграмму Браттели) и центральную меру ν на пространстве $\mathcal{T}(\Gamma)$ его бесконечных путей, что действие адического автоморфизма S на пространстве $(\mathcal{T}(\Gamma), \nu)$ изоморфно действию оператора T на пространстве (X, μ) . Вопрос о возможности универсальной реализации звучит следующим образом: возможно ли в этой конструкции ограничиться неким фиксированным графом Γ , а изменять лишь центральные меры на пространстве его путей? Ответ на этот вопрос, по-видимому, неизвестен.

Мы доказали, что, если взять произвольный автоморфизм (с двучленной образующей), и рассмотреть его произведение на одометр (прибавление единицы в группе \mathbf{Z}_2 целых диадических чисел), то для такого автоморфизма возможна адическая реализация на универсальной диаграмме Браттели — так называемом графе ОР упорядоченных пар (вершины каждого следующего уровня этого графа соответствуют упорядоченным парам вершин предыдущего уровня). Более того, этот же граф является в том же смысле универсальным для действия группы $\oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ — бесконечной суммы групп порядка 2.

Далее, мы описали всевозможные эргодические центральные меры на пространстве путей $\mathcal{T}(\text{ОР})$ графа упорядоченных пар. В предыдущих работах, посвященных исследованию масштабирующих энтропийных последовательностей, было построено такое семейство специальных центральных мер μ^σ на

пространстве $\mathcal{T}(\text{OP})$, что масштабирующие последовательности адического автоморфизма S относительно этих мер исчерпывают все допустимые для масштабирующих последовательностей скорости роста. В работе [4] мы доказываем, что масштабирующая последовательность адического автоморфизма S на пространстве $(\mathcal{T}(\text{OP}), \mu^\sigma)$ совпадает с так называемой масштабирующей последовательностью фильтрации (хвостовой) на пространстве $(\mathcal{T}(\text{OP}), \mu^\sigma)$. Такое совпадение демонстрирует некоторую связь между различными понятиями масштабирующих последовательностей (для действия и для фильтрации). Перед этим мы доказываем, что масштабирующая последовательность фильтрации тоже не зависит от выбора исходной метрики, используемой при итерации. Стоит отметить, что важнейший вопрос о существовании масштабирующей последовательности для любого автоморфизма остается пока открытым.

1.2 Метод функции Беллмана

Совместно с коллегами, мы продолжаем разрабатывать наш подход к оценке интегральных функционалов на так называемых классах функций малой средней осцилляции. Такие классы функций задаются двумерными областями специального вида — разностью двух выпуклых множеств. Частными случаями классов малой средней осцилляции являются классические в гармоническом анализе пространство BMO , классы весов Макенхаупта, классы обратного неравенства Гельдера и обратного неравенства Йенсена. Оказывается, наш подход, разработанный прежде всего для получения точных оценок на пространстве BMO , работает в достаточно широкой общности.

Кроме того, мы также применяем метод функции Беллмана для исследования таких классических функциональных пространств, как L^p . Недавно мы показали, как этим способом можно найти модуль равномерной выпуклости такого пространства. Сейчас мы исследуем возможность уточнения классического неравенства Гельдера. А именно, мы находим наибольшее и наименьшее значения выражения $\int fg$ при условиях $f \in L^p$, $g \in L^q$ (тут p, q — сопряженные показатели), при фиксированных значениях $\int |f|^p$, $\int |g|^q$, $\int f$, $\int g$. Ответ на этот вопрос дает подход к получению аналога неравенства Бесселя для пространства L^p .

2 Сравнение заявки и достигнутых результатов

Как и предполагалось в заявке, я занимался исследованием масштабирующей энтропии динамических систем. Акцент в заявке был сделан на изучение связи этого понятия со спектральными характеристиками. Однако, направление исследований оказалось несколько иным. Основными результатами в данной деятельности можно назвать, во-первых, подтверждение гипотезы Вершика о независимости класса масштабирующей последовательности от выбора усредняемой метрики, во-вторых, полное описание возможных классов масштабирующих последовательностей. Кроме этого, приведены вычисления масштабирующих последовательностей ряда динамических систем. Получен результат о независимости масштабирующей последовательности фильтрации от выбора исходной итерированной метрики, установлено совпадение в некоторых частных случаях масштабирующей последовательности действия и фильтрации.

Кроме заявленной тематики мы с коллегами активно занимались исследованием так называемого метода функции Беллмана в анализе. Это метод, позволяющий находить точные оценки в тех или иных задачах, обладающих самоподобием определенного вида. В основном мы занимались оценками интегральных функционалов на классах функций малой средней осцилляции. Нам удалось значительно расширить область применения метода в рамках этой общности, дать четкое обоснование его эффективности.

3 Участие в конференциях

1. XXV St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis: Tribute to Victor Havin (1933–2015). 25.06.16–30.06.16, Saint-Petersburg, Russia.

4 Педагогическая деятельность

С сентября 2014 по июнь 2016 — преподаватель кафедры математических и информационных технологий Санкт-Петербургского академического университета — научно-образовательного центра нанотехнологий РАН (Академического Университета)

Опубликованные работы и препринты

- [1] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy. *Bellman function for extremal problems in BMO*. Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 5, 3415–3468.
- [2] D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy. *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*. Advances in Mathematics, Volume 291, 19 March 2016, Pages 228–273.
- [3] D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy. *Monotonic rearrangements of functions with small mean oscillation*. Studia Mathematica 231 (2015), 257–267.
- [4] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий. *Универсальная адическая аппроксимация, инвариантные меры и масштабированная энтропия*. Препринты ПОМИ, 2016.