

Краткое изложение заявки Бизяева Ивана Алексеевича

Пусть на некотором многообразии M задана динамическая система посредством потока векторного поля

$$\dot{x} = v(x). \quad (1)$$

Основной целью моих исследований является изучение поведения динамических систем (1) возникающих в различных, как правило, прикладных задачах. При этом основная идея состоит в том, что различные типы динамического поведения систем (1) связаны с наличием либо отсутствием тензорных инвариантов уравнений движения (1). К тензорным инвариантам относятся: скалярные функции – первые интегралы, а также поля симметрий, пуассоновы структуры (как правило – вырожденные), инвариантные меры. Их существование во многих случаях имеет скрытый (не имеющий очевидного симметричного происхождения) характер.

Особое место среди (1) занимают интегрируемые системы. Под интегрируемостью системы понимается возможность представить ее решение в квадратурах. Для изучения динамики интегрируемых систем (1) применяются различные методы топологического анализа. Прежде всего это бифуркационная диаграмма. Исходя из которой, во-первых ищутся периодические решения и инвариантные многообразия (1), определяющие во многом структуру фазового потока системы. Во-вторых выполняется топологическая классификация всех типов интегральных поверхностей и исследуется их перестройки (бифуркации). Так же рассматриваются вопросы устойчивости найденных периодических решений и инвариантных многообразий.

Мои исследования, так же связаны с изучением поведения неинтегрируемых случаев (1). При этом в основном применяются методы компьютерного исследования: численный анализ фазового потока системы с помощью локальных и глобальных сечений Пуанкаре; численные методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Одним из основных источников примеров в моих работах служит неголономная механика. Так, к примеру, была изучена задача о качении твердого тела по плоскости и поверхности сферы без проскальзывания и верчения. При этом уравнения движения имеют замечательную структуру, близкую к классическим уравнениям Эйлера – Пуассона. Возникающие динамические системы обобщают хорошо изученные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. В результате проделанных исследований показано, что в зависимости от геометрии поверхности катящегося тела и распределения масс в нем в этой задаче встречаются различные типы динамического поведения. Прежде всего это интегрируемые системы, в которых неособые инвариантные многообразия – двумерные торы, а все траектории регулярны и являются либо квазипериодическими, либо периодическими их обмотками. А так же системы демонстрирующие типичный диссипативный хаос, характеризующийся наличием квазиаттракторов, странных аттракторов.

В настоящее время исследуется задача о свободном движении связки двух тел, соединенных неголономным шарниром. Эта задача хотя и является неголономной, но оказывается, что она может быть представлена в гамильтоновой форме со скобкой Ли-Пуассона ранга 2. Известно, что отсутствие глобально определенных функций Казимира для скобок ранга 2 может приводить к неинтегрируемости и даже к хаосу. В рассматриваемой нами задаче ситуация промежуточная. Хотя такого набора глобальных функций Казимира не существует, система интегрируется в квадратурах. В данный момент для этой системы построена бифуркационная диаграмма и показано, что в ней встречается три типа интегральных поверхностей: тор T^2 , сфера S^2 и сфера с 3-мя ручками M_3^2 (ориентируемая двумерная поверхность рода 3). Далее в этой системе будет изучено поведение траекторий на найденных интегральных поверхностях и выполнена их классификация. Кроме того будет исследована устойчивость неподвижных точек.

В ближайший год будет рассмотрена еще одна система, так называемая задача о хула-хупе (hula-hoop). Напомню, что хула-хуп представляет собой тонкостенный обруч вращающийся вокруг талии человека. В самой постановке задачи обруч будет вращаться вокруг цилиндра, который совершает вращательные движения вокруг оси симметрии. Для этой системы будут выведены уравнения движения в квазикоординатах и будет выполнен подробный анализ динамического поведения этой системы, а так же изучены вопросы управления.

Далее планируется исследовать динамику тележки на плоскости, в которой оси с колесами могут свободно вращаться. В этой системе с неголономными связями имеются положения осей, в которых связи вырождаются. Это приводит к тому, что для траекторий, проходящих в окрестности точек вырождения, силы реакции испытывают значительные изменения. Планируется провести классификацию фазовых портретов в окрестности точки вырождения и подробно проанализировать возможные типы движения самой тележки.