

В.Ю.Протасов

НАГЛЯДНАЯ ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМА

Аннотация

Теория экстремума изучает минимумы и максимумы функций на множествах. В мини-курсе из четырёх лекций мы постараемся изложить идеи основных методов этой теории, от классических до современных. Применения этих методов весьма разнообразны: от основной теоремы алгебры до тонких результатов выпуклой геометрии, таких как теорема Минковского о многогранниках, теорема Бирхгофа о бильярдах, теорема Радона-Минковского и т.д. Будет рассмотрено несколько примеров, которые приведут нас к началам вариационного исчисления и к задачам о геодезических на многогранниках.

Доказательства, как правило, будут наглядны (что следует из названия мини-курса) и элементарны. Лекции рассчитаны на учеников 10-11 классов и студентов младших курсов.

Лекция 1. Экстремум и теоремы существования.

Доказательства теорем существования методами теории экстремума (основная теорема алгебры, теорема Бирхгофа о замкнутых бильярдах, теорема Радона-Минковского). Наилучшие приближения. Многочлены Чебышева. Альтернатива.

Лекция 2. Конечномерные экстремальные задачи. Подход Лагранжа.

Множители Лагранжа. От задачи Штейнера о шарнирном четырёхугольнике – к решению задачи Дидоны. В чём секрет метода множителей? Доказательства классических неравенств. Теорема Минковского о существовании многогранника с данными площадями граней.

Лекция 3. Что такое вариационное исчисление?

Брахистохрона – кривая наискорейшего спуска. Оптико-механический подход И.Бернулли. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Примеры. Аэродинамическая задача Ньютона.

Лекция 4. Геодезические на выпуклых поверхностях.

Гипотеза Пуанкаре о трёх замкнутых геодезических. Пример четвертой геодезической на эллипсоиде. Геодезические на тетраэдре. Теорема о числе замкнутых геодезических на многограннике. Некоторые нерешённые задачи.

Протасов Владимир Юрьевич,
Механико-Математический факультет,
МГУ им. М.В.Ломоносова, 119992, Москва.
e-mail: v-protassov@yandex.ru