

# К первой лекции Г.Б.Шабата **Когда $1=0\dots$**

**1.1.** Сколько десятичных знаков в числе  $\binom{2009}{1000}$ ?

**1.2.** Перечислите прямые и плоскости в трёхмерных пространствах над полями из 2,3,4 и 5 элементов.

**1.3.** Перечислите плоскости в четырёхмерных пространствах над полями из 2 и 3 элементов.

**1.4.** Докажите геометрически равенство

$$\frac{\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q)}{\#\mathbf{Gr}_{n;k-1}(\mathbb{F}_q)} = \frac{q^{n-k+1} - 1}{q^k - 1}$$

для  $2 \leq k \leq n$ . Выведите из этого равенства прямое (без действий групп на множествах) доказательство формулы

$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q) = \frac{\prod_{a=1}^n (q^a - 1)}{\prod_{b=1}^k (q^b - 1) \prod_{c=1}^{n-k} (q^c - 1)}.$$

**1.5.** Исследуйте (желательно, с помощью компьютера) количества точек на плоской алгебраической кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 - x$$

над полями  $\mathbb{F}_p$ , где  $p$  – простые числа. (Рекомендуется использовать компьютер). Примерно для половины простых ответ окажется очевидным. Каким свойством определяется эта половина?

**1.6.** Вычислите *дзета-функции Хассе-Вейля* нескольких грассманианов

$$Z(\mathbf{Gr}_{n;k}, s) := \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_{q^r})}{r} s^r$$

как функции переменной  $q^s$ . Какая информация о грассманиане сохраняется при  $q = 1$ ? (Для тех, кто знаком с гипотезами Вейля и когомологиями: какая информация о комплексных грассманианах  $\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{C})$  содержится в этих функциях? Что легче: получить эту информацию обсуждаемым способом или *традиционно*?)

**1.7.** Свяжите *флаги* в проективных пространствах над конечными полями с *линейными порядками* на конечных множествах.