

# КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, УЗЛЫ И ПОЛИНОМ ДЖОНСА

Лектор: Иван Лосев

Изучение узлов – одна из классических задач топологии. По научному, узел – это вложение окружности в  $\mathbb{R}^3$ . Одна из основных задач при изучении узлов – построить инварианты, которые будут различать разные узлы. Существуют разные подходы к построению таких инвариантов, и нас будет интересовать один – диаграммный. При этом подходе, узел проектируется на плоскость, его проекция называется диаграммой. По диаграмме можно построить инвариант.

Один из самых известных инвариантов, который получается таким образом – это полином Джонса, построенный Джонсом в 1984 году (и ставший одним из ингредиентов его филдсовской медали). Этот полином можно определить элементарным образом, однако из этого элементарного определения не видно одного – почему он существует!

Один из способов доказывать существование (открытый Тураевым и отличный от исходного способа Джонса) состоит в использовании квантовых групп. Квантовые группы восходят к работам ленинградской мат-физической школы по квантовой статистической физике, и, в полной общности, были определены Дринфельдом и Джимбо в 80-ых (что стало одним из ингредиентов филдсовской медали Дринфельда). Этим подходом мы и воспользуемся, при этом нам будет нужна только самая маленькая квантовая группа –  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , для которой большой науки не требуется.

*Программа:* 4 лекции.

## **Лекция 1: алгебры Хопфа.**

- 1) Алгебры Ли: определение алгебр Ли; представления алгебр Ли и их тензорные произведения; универсальная обертывающая алгебра.
- 2) Алгебры Хопфа, мотивация: тензорные произведения; двойственность.
- 3) Алгебры Хопфа, определение: биалгебры, антипод.

## **Лекция 2: квантовая группа $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .**

- 1)  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , как алгебра Хопфа:  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , как ассоциативная алгебра; структура алгебры Хопфа; предел при  $q \rightarrow 1$ .
- 2) Представления алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .
- 3)  $R$ -матрица: обсуждение; конструкция.

## **Лекция 3: группа кос.**

- 1) Косы и квантовые группы: уравнение Янга-Бакстера; группа кос и ее представление через  $R$ -матрицу.
- 2) Косы и узлы: топологическое определение косы; умножение; замыкание косы и теорема Александра; теорема Маркова (без доказательства).

## **Лекция 4: Полином Джонса.**

- 1) Полином Джонса через  $R$ -матрицу.
- 2) Дополнения.

*Целевая аудитория:* студенты.

*Пререквизиты:*

- 1) тензорные произведения векторных пространств и линейных отображений, двойственное пространство, тензорная алгебра векторного пространства (соответствующей главы в учебнике Винберга достаточно).
- 2) Вера в то, что алгебраические объекты могут быть заданы образующими и соотношениями.
- 3) Полезно знать базовые определения из теории представлений групп, включая тензорное произведение представлений.