

Задачи к лекции 1

по курсу "Теорема Дирихле о единицах Дубна, 19-30 июля 2014 г.

Задачи по курсу Никона и Артёма. Сдавать их можно нам в комнате 229 в свободное от занятий время, если, конечно, мы не играем в футбол/волейбол/...

1. Докажите, что сумма двух последовательных треугольных чисел – полный квадрат.

2. Найдите хотя бы три набора из трёх последовательных треугольных чисел, сумма которых – полный квадрат.

3. Покажите, что существует бесконечно много пар $(a, b, c), (p, q, r)$ простых пифагоровых троек таких, что $|a - p|, |b - q|$ и $|c - r|$ равны 3 или 4.

4. Решите уравнение $57x + 2y = 1543$ в целых числах.

5. Что будет, если в уравнении Пелля $x^2 - qy^2 = 1$ коэффициент q будет полным квадратом?

6. Докажите теорему о виде пифагоровых троек геометрически.

Указание: приведите уравнение к уравнению окружности и посмотрите, какой угол наклона у прямой, которая соединяет точку $(-1, 0)$, с точкой, соответствующей решению.

7. Может ли $x^2 - 2y^2$ при целых значениях x, y быть равным 2, -2, 3 или -3?

8. Разложите в цепную дробь $\sqrt{5}, \sqrt{2} - 1$.

9. Докажите, что для подходящих дробей $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ выполнено

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n.$$

10. Докажите, что если цепная дробь периодична (с какого-то момента), то она является корнем квадратичного многочлена с целыми коэффициентами.

11*. Докажите предыдущее утверждение в обратную сторону.